CHRISTIANI HUGENII

A ZULICHEM,

Dum viveret Zelhemi Toparchæ,

OPERA VARIA.

VOLUMEN SECUNDUM.



LUGDUNI BATAVORUM,
Apud JANSSONIOS VANDER AA,
Bibliopolas. MDCCXXIV.

CHRISTIANI HUGENII

OPERA GEOMETRICA.

TOMUS SECUNDUS.

Tomi secundi contenta.

III

CHRISTIANI HUGENII,

CONST. F.

THEOREMATA

DE

QUADRATURA

HYPERBOLES, ELLIPSIS

ET CIRCULI,

EX DATO

PORTIONUM GRAVITATIS CENTRO.

Quibus subjuncta est

Ἐξέτασις Cyclometriæ Cl. Viri GREGORII à S. VINCENTIO, editæ Anno CIↃ IↃCXLVII.

Qq 2

AD LECTOREM.

DE Conicis Sectionibus & Circulo novi quid adferimus, Amice Lector, ſi tamen ita vocari queat, quod æternâ lege definitum conſtitutumque, quale nunc eſt, perpetuò fuit. Sic quod recens effoditur, novum quis aurum dicat. Sic ſtellas in cœlo novas, quæ ſuperioribus ſæculis incognitæ, noſtrorum artificio deteguntur. Neque verò his Geometricum Theorema ullum vetuſtate cedit, ſed nos novitatem ſingulis tribuimus, prout quæque ſeſe nobis offerunt fiuntque manifeſta. Itaque & inſcripti trigoni Parabola ante Archimedem ſeſquitertia fuiſſe dicenda eſt; neque illa minùs immutabili veritate reliquarum Sectionum Circulique portionibus ſemper inerant, quæ nunc circa eas prodimus, licet antehac nemini, de quo quidem ad nos pervenerit, comperta fuiſſe conſtet vel determinata. Damus autem non iſti, quam retulimus, Archimedeæ ſimilem determinationem, neque vel ipſa rerum natura, poſt tot ſubtiliſſimorum hominum deluſos conatus, ſpem reliquiſſe videtur tale quid unquam de figuris, quas tractandas ſumpſimus, expectandi: Verùm id præſtitiſſe profitemur, quod in ipſa

quoque inscriptione expressum est, & paulò quid amplius, si Lectoris æqui judicium prævenire permittitur. Namque ex datis gravitatum centris Hyperbolas, Ellipses & Circulos ad quadrata redigere non finis est horum Theorematum, sed consequentia duntaxat; eoque nomine potissimum placere debent, quòd aliquatenus certam trium Portionum ad inscripta triangula rationem demonstrant. Eam in Hyperbola primum mihi deprehendere contigit, viâ destinatâ planè, sed impeditâ difficilique; quâ deinde breviorem exquirens, in hanc incidi quæ ad Ellipsin & Circulum quoque pertineret, commodumque obvenit constans illa in cognatis figuris mirabilisque convenientia. Quæ quidem universim in omnibus hisce quo minus locum habeat, sola facit Propositionum novissima, supernumeraria illa quasi, atque ultra propositum adscita, cujusque hoc solum mihi tribui par est, quod ex præcedentibus ipsam non ineleganti ratione comprobari posse ostendi. Dudum enim hîc nos prævenit, egregiumque Theorema ante annos undeviginti demonstratum dedit acutissimus Geometra I. Della Faille, felix, meâ quidem sententiâ, quod ante alios perspexerit, quomodo à sectorum gravitatis centro Quadratura dependeret: cumque illum in Circulo præcipuam laudem promeruisse agnoscam, non æquè gavisus sum detectâ in reliquis hujus segmentis simili connexione,

ne, quàm cum eandem in Hyperboles portionibus observassem, illudque invenissem de quo tantus Vir non potuit non & ipse cogitasse. Raros alioqui semper hæc figura, si cum Circulo conferatur, sui contemplatores nacta est; ejusque rei vel effectum vel indicium habemus, quod cum varia sint inspecta quibus datis Quadraturam quoque Circuli dari necesse sit; cujusmodi sunt exacta perimetri longitudo, Helicis Archimedeæ contingens, Quadratricis Dinostrati terminus, vel tangens quoque ejusdem Quadratricis ad terminum alterum, (sicut aliquando me demonstrasse memini) & alia nonnulla quæ recentioribus debentur; nihil interea à quoquam definitum extet, quo vel sub ulla conditione Hyperbole cum spatio rectis comprehenso lineis comparari possit. Nostrâ sanè ætate, paucisque abhinc annis Vir Clariss. D. Gregorius à S. Vincentio, de quo mihi deinceps dicendum restat, exquisitâ prorsus novâque methodo utramque Quadraturam aggressus est, & credidit eâdem se propemodum demonstratione absolvisse. At ego cum amplissima quæ de hisce volumina emisit, perscriptis jam Theorematis meis, diligentius evolverem, (certus, si quod intenderat obtineret, saltem gravitatis me centra exhibiturum,) intellexi tandem, majori subtilitate quàm successu rem arduam tentatam fuisse; ratione quoque repertâ quâ id clarissime ostendi posse confido.

Et

Et quando inter tot eximios hoc ævo Geometras nondum licuit animadvertere qui sibi hanc provinciam delegerit, ac proinde fieri posset ut longa porro dubitatio maneret circa demonstrationes, quas certissimas esse oportet; arbitratus sum me facturum quod & in publicum utile esset & à propositi argumenti ratione non alienum, si simul hîc prodire sinerem, quæ novam in re obscura lucem allatura videbantur. Nulla autem temeritate ad elevandam Viri gravis & eruditi auctoritatem accessi, sed causæ bonitate adductus, putavi quæ compereram liberè citraque offensam proponi posse. Majori quoque fiduciâ, posteaquam is sese ipsum per literas, quarum aliquod inter nos commercium est, auctorem hortatoremque candidè præbuit, ut siqua commentatus essem, ea cum universis communicarem. Ingenuitatem hanc insignem lubenti gratoque uti meretur animo accepi, & spero modestâ reprehensione satis me declarasse, quanti æstimem Doctiss. Viro haberi amicus. Cujus invicem summa, quâ me usque adhuc excepit, humanitas facit ne quid aliud exspectem, nisi ut vel moderatè & sine ulla acerbitate ad mea respondeat, si quid iis reponendum esse duxerit, vel rationibus evidentissimis persuasus, æquè lubens nostra quam alterius posthac opera veriora sentiat & amplectatur.

CHRI-

CHRISTIANI HUGENII,
CONST. F.

THEOREMATA
DE
QUADRATURA
HYPERBOLES, ELLIPSIS, ET CIRCULI,
EX DATO
PORTIONUM GRAVITATIS CENTRO.

THEOREMA I.

Portioni hyperboles, vel ellipsis vel circuli portioni, dimidiâ ellipsi dimidiove circulo non majori, circumscribi potest figura ex parallelogrammis æqualem latitudinem habentibus, quæ portionem excedat spatio quod minus sit quovis dato.

Data sit portio A B C, cujus diameter B D. TAB. XXXIV. Fig. 1. Super basin A C constituatur parallelogrammum A E, latera duo habens diametro B D parallela & æqualia, quo fiet ut latus reliquum portionem in vertice contingat. Hoc parallelogrammo continuè in duo æqualia secto, relinquetur tandem pars quæ mi-

Data sit portio A B C & triangulus D E F, basibus A C, D F æqualibus; & portionis diameter sit B G, in triangulo vero ducta à vertice in mediam basin linea E H. Sint autem utræque B G, E H vel ad bases rectæ vel æqualiter inclinatæ; & quam rationem habet B G ad E H, in eandem dividatur spatium datum, sintque partes K & L. Circumscribatur jam sicut antea portioni A B C figura ordinatè, quæ portionem superet excessu minore quàm sit spatium K. Et triangulo D E F circumscribatur figura quæ totidem parallelogrammis constet, quot sunt in figura portioni A B C circumscripta. TAB. XXXIV. Fig. 2.

Quoniam igitur bases portionis & trianguli æquales sunt, apparet quidem omnium parallelogrammorum eandem fore latitudinem. Hinc quum parallelogrammum B M sit ad E R ut B G ad E H, id est ut K ad L, sitque B M minus quam K [1], erit quoque E R minus quam L [2]. Verùm omnia triangula quibus constat excessus figuræ circumscriptæ supra triangulum D E F, æqualia sunt parallelogrammo E R, ergo minor est idem excessus spatio L. Sed & excessus quo figura circumscripta portionem A B C superat, minor est spatio K. Ergo uterque simul excessus minor erit spatio K L dato. Et constat fieri posse quod proponebatur.

[1] Ex constr. [2] 14. 5. Elem.

THEOREMA III.

SI portioni hyperboles, vel ellipsis vel circuli portioni, dimidiâ ellipsi dimidiove circulo non majori, circumscribatur figura ordinatè; ejus figuræ centrum gravitatis erit in portionis diametro.

Sit portio quælibet istarum A B C, diameter ejus B D, & circumscribatur ei ut supra figura ordinatè. Ostendendum est ejus figuræ centrum gravitatis fore in B D diametro. Ducantur lineæ H K, N R, P S, conjungentes suprema latera parallelogrammorum quæ à diametro portionis æqualiter utrinque distant. TAB. XXXVI. Fig. 1.

Quoniam igitur F H, L K sunt diametro B D parallelæ, suntque D F, D L æquales, oportet lineam H K, quæ duas F H, L K conjungit, à diametro B D bifariam secari; quare eadem H K parallela erit basi A C [1], & E H K G recta linea. Itaque E C parallelogrammum est; cujus opposita latera quum bifariam dividat diameter B D, erit in ea parallelogrammi centrum gravitatis [2]. Eâdem ratione parallelogramma erunt H M, N O, P Q, & singulorum centra gravitatis in linea B D. Ergo & figuræ ex omnibus dictis parallelogrammis compositæ centrum gravitatis in eadem B D reperiri necesse est. Ista autem figura eadem est quæ portioni ordinatè fuerat circumscripta. Ergo figuræ portioni ordinatè circumscriptæ centrum gravitatis constat esse in B D portionis diametro. Quod erat ostendendum.

[1] 5. lib. 2. Con.

[2] 9. lib. 1. Archim. de Æquipond.

Theorema IV.

Portionis hyperboles, ellipsis & circuli, centrum gravitatis est in portionis diametro.

TAB. XXXIV. Fig. 4.

Esto portio hyperboles, vel ellipsis vel circuli dimidiâ primum figurâ non major, A B C; diameter ejus B D. Ostendendum est, in B D reperiri portionis A B C gravitatis centrum.

Si enim fieri potest, sit extra diametrum in E, & ducatur E H diametro B D parallela. Dividendo itaque D C continuè bifariam, relinquetur tandem linea minor quam D H; sit ea D F, & circumscribatur portioni figura ordinatè ex parallelogrammis quorum bases æquales sint lineæ D F, & jungantur B A, B C. Figuræ itaque portioni circumscriptæ centrum gravitatis est in B D portionis diametro. Sit hoc K, & jungatur E K, producaturque, & occurrat ei A L parallela B D. Quia autem portio major est triangulo A B C, & excessus quo figura circumscripta portionem superat, minor parallelogrammo B F, uti supra demonstratum fuit *; erit major ratio portionis A B C ad dictum excessum, quàm trianguli A B C ad B F parallelogrammum, id est quàm A D

* Theor. 1.

A D ad D F; multoque major quam A D ad D H, vel quàm L K ad K E. Sit itaque M K ad K E ficut portiô A B C ad exceffum quo ipfa fuperatur à figura ordinatè circumfcripta. Itaque cum K fit centrum grav. figuræ portioni circumfcriptæ, & E centrum grav. ipfius portionis; erit M centrum gravitatis omnium fpatiorum quæ eundem exceffum conftituunt [a]. Quod effe non poteft; Nam fi per M linea ducatur diametro B D parallela, erunt ab una parte omnia quæ diximus fpatia. Manifeftum eft igitur, portionis A B C centrum grav. effe in B D portionis diametro.

[a] 8 lib. 1. Arch. de Æquipond.

Efto nunc A B C portio ellipfis vel circuli, dimidiâ figurâ major. Abfolvatur figura, & producatur B D ufque dum fectioni occurrat in E; erit igitur portionis A E C diameter E D, & B D E diameter totius figuræ. Et quoniam in B D E diametro eft figuræ totius centrum gravitatis, (hoc enim ex prædemonftratis conftabit, fi in duo æqualia tota figura dividatur diametro quæ ipfi A C fit parallela,) & in eadem centr. gravitatis A E C portionis minoris, ficut modò oftenfum fuit; erit quoque centr. gravitatis portionis reliquæ A B C in B D E [a]; quod erat oftendendum.

TAB. XXXIV. Fig. 5.

[a] 8. lib. 1. Archim. de Æquipond.

* LEMMA.

Efto linea E B, cui ad utrumque terminum adjiciantur æquales duæ E S, B P, & infuper alia P D. Dico id quo rectangulum E D B excedit E P B, æquari rectangulo S D P. Eft enim rectangulum E D B æquale iftis duobus, rectangulo E D P & rectangulo fub E D, P B: quorum ultimum fuperat rectangulum E P B, rectangulo D P B. Igitur exceffus rectanguli E D B fupra rectangulum E P B æqualis eft duobus iftis, rectangulo E D P, & D P B. Sed rectangulum E D P addito rectangulo D P B, id eft rectangulo fub E S, D P, æquale fit rectangulo S D P. Manifeftum eft igitur, exceffum rectanguli E D B fupra E P B, æquari rectangulo S D P.

TAB. XXXIV. Fig. 6.

† Efto rurfus linea E B, cui ad utrumque terminum aufe-

TAB. XXXIV. Fig. 7.

 ran-

* Idem hoc aliter demonftratum reperi apud Pappum, lib. 7. Prop. 24.
† Vide eundem, lib. 7. Prop. 57.

rantur duæ æquales E S, B P, & insuper alia P D. Dico iterum, id quo rectangulum E D B excedit E P B, æquari rectangulo S D P. Rectangulum enim E D B æquale est istis duobus, rectangulo E D P, & rectangulo sub E D, P B; horum autem E D P rursus æquale est duobus, rectangulo nimirum S D P, & ei quod continetur sub E S, D P, sive rectangulo D P B. Igitur rectangulum E D B istis tribus æquale est rectangulis, S D P, D P B, & rectangulo sub E D, P B; horum vero duo postrema æquantur rectangulo E P B; ergo rectangulum E D B æquale est duobus, rectangulo nimirum S D P & E P B, unde apparet excessum rectanguli E D B supra rectangulum E P B æquari rectangulo S D P.

THEOREMA V.

Datâ portione hyperboles, vel ellipsis vel circuli portione, dimidiâ figurâ non majore; si ad diametrum constituatur triangulus hujusmodi, qui verticem habeat in centro figuræ, & basin portionis basi æqualem & parallelam; eam verò quæ deinceps à vertice ad mediam basin pertingit tantam, ut possit ipsa rectangulum comprehensum lineis, quæ inter portionis basin & terminos diametri figuræ interjiciuntur. Erit magnitudinis, quæ ex portione & præscripto triangulo componitur, centrum gravitatis punctum idem quod est trianguli vertex, centrum nimirum figuræ.

TAB. XXXV. Fig. 1. 2. 3. Data sit portio hyberboles, vel ellipsis vel circuli portio dimidiâ figurâ non major, A B C. Diameter ejus sit B D, & figuræ diameter B E, in cujus medio centrum figuræ F. Et sumatur F G quæ possit rectangulum B D E, ductâque K G H æquali & parallelâ basi A C, quæque ad G bifariam

riam dividatur, jungantur K F, F H. * Demonstrandum est, quod magnitudinis compositæ ex portione A B C & triangulo K F H, centrum gravitatis est punctum F.

Si non est in F, sit si fieri potest primùm ab ea parte puncti F quæ est versùs A B C portionem, atque esto punctum L; constat autem futurum in recta B D G, quum in hac sint utraque centra gravitatis portionis & trianguli K F H. Jungantur A B, B C, & quam rationem habet G F ad F L, eam habeat magnitudo composita ex triangulis A B C, K F H ad spatium quoddam M; & circumscribantur portioni & triangulo K F H figuræ ordinatè, ex parallelogrammis quorum omnium sit eadem latitudo, ita ut duo simul excessus quibus istæ figuræ superant portionem A B C & triangulum K F H, minores sint spatio M [1]. Igitur duorum simul triangulorum A B C, K F H ad dictos duos excessus sive residua major erit ratio quàm ad M, id est quàm G F ad F L, ac proinde longè major ratio portionis A B C unà cum K F H triangulo ad eadem residua quam G F ad F L. Sit itaque N F ad F L, sicut portio A B C simul cum triangulo K F H ad duo residua, & cadet terminus N ultra trianguli basin K H. Jam per F ducatur O Ξ parallela basi A C vel K H; & duorum quorumcunque parallelogrammorum, quæ in portione & in triangulo K F H æqualiter à diametro distabunt, ut sunt R Q, Σ T, sint centra gravitatis V & X; per quæ ducatur recta Z Λ Δ Ω, secans lineam O Ξ in Υ; & ducatur R P basi A C parallela, abscissæque ad verticem lineæ P B sumatur æqualis, ex altero diametri figuræ termino, E S.

Quoniam igitur ad diametrum figuræ ordinatim sunt applicatæ C D & R P, erit ut rectangulum B D E ad rectangulum B P E, ita quadratum C D ad R P quadratum [2], verùm ut C D ad R P, hoc est, ut H G ad Ψ G, ita est H F ad Σ F, & ita Z Υ ad Λ Υ; igitur ut C D quadratum ad quadratum R P, id est ut rectangulum B D E ad B P E, ita

[1] Theor. 2. h.

[2] 21. lib. 1. Con.

* Notatu dignum quod K F, F H in hyperbole sunt asymptoti.

ita est quadratum Z Υ ad Λ Υ quadratum. Quare & per conversionem rationis, sicut rectangulum B D E ad differentiam rectangulorum B D E, B P E, ita quadratum Z Υ ad differentiam quadratorum Z Υ, Λ Υ. Est autem differentia rectangulorum B D E, B P E, æqualis rectangulo S D P, sicut lemmate præmisso demonstratum est; differentia verò quadratorum Z Υ, Λ Υ, æqualis quadrato Z Λ & duobus rectangulis Z Λ Υ[3], sive quod idem est, rectangulis Z Λ X, Z Λ Υ bis sumptis, hoc est, duplo rectangulo sub Z Λ, X Υ. Itaque sicut est rectangulum B D E ad rectangulum S D P, ita quadratum Z Υ ad duplum rectangulum sub X Υ, Z Λ. quare cum rectangulum B D E quadrato F G æquale sit[4], ideoque & quadrato Z Υ, erit quoque rectangulum S D P æquale duplo rectangulo sub X Υ, Z Λ[5]. Quia verò F punctum dividit B E per medium, suntque æquales B P, E S, etiam F P, F S æquales erunt, unde addità utrique F D, erit S D æqualis toti P F D id est Δ Υ Ω: sed Δ Υ Ω dupla est lineæ V Υ, quia bis continet utramque Υ Δ, Δ V in hyperbole, in ellipsi verò & circulo bis utramque V Ω & Ω Υ; ergo & S D dupla V Υ, ideoque rectangulum S D P æquale duplo rectangulo sub Υ V, Ω Δ. Sed idem rectangulum S D P æquale ostensum fuit duplo rectangulo sub X Υ, Z Λ; ergo æquale est rectangulum sub Υ V, Ω Δ, rectangulo sub X Υ, Z Λ. Est itaque Υ V ad Υ X, ut Λ Z ad Ω Δ[6]; verùm ut Λ Z ad Ω Δ, ita est parallelogrammum Σ T ad R Q; itaque & Υ V est ad Υ X ut parallelogrammum Σ T ad R Q parallelogr. Sunt autem puncta X & V centra gravitatis dictorum parallelogrammorum; ergo magnitudinis ex utroque parallelogrammo compositæ centrum gravitatis est punctum Υ[7]. Eâdem ratione ostendi potest de reliquis omnibus parallelogrammis, quod duorum quorumlibet oppositorum centrum gravitatis est in linea O Ξ. Ergo totius magnitudinis quæ ex duabus figuris utrimque ordinatè circumscriptis componitur, centr. gravitatis in eadem O Ξ reperiri necesse est. Sed ejusdem compositæ magnitudinis centrum gravit. est quoque in recta

B D G,

[3] 4. lib. 2. Elem.
[4] Ex constr.
[5] 14. 5. Elem.
[6] 15. 16. 6. Elem.
[7] 7. lib. 1. Archim. de Æquip.

B D G, quoniam in ea sunt centra gravitatis utriusque figuræ circumscriptæ [8]; igitur magnitudinis ex dictis figuris [8 Theor. 3. h.] compositæ centrum grav. est ipsum punctum F. Positum áutem fuit L punctum centrum gravitatis ejus magnitudinis quæ ex portione A B C & K F H triangulo componitur; igitur magnitudinis reliquæ, compositæ ex duobus residuis, quæ in figuris circumscriptis remanent, erit centr. grav. in producta L F, ubi ea sic terminatur, ut pars adjecta habeat ad F L eandem rationem quam portio A B C simul cum K F H triangulo ad dicta duo residua [9]: is autem terminus est N; itaque N punctum est centrum gravitatis duorum residuorum. Quod fieri nequit; Nam si per N ducatur recta basi K H parallela, erunt ab una parte spatia omnia è quibus utrumque residuum constat. Non est igitur L punctum centrum gravitatis magnitudinis ex portione A B C & K F H triangulo compositæ. Sed neque erit ab altera parte puncti F. Namque hoc si dicatur, planè simili demonstratione eò devenietur ut duorum residuorum quæ demptâ portione A B C & K F H triangulo, in circumscriptis figuris superérunt, centrum gravitatis sit ultra portionem A B C; quod est æquè absurdum. Reliquum est igitur ut sit ipsum punctum F; quod erat ostendendum.

[9 8. lib. 1. Archim. de Æquipond.]

THEOREMA VI.

Omnis hyperboles portio ad triangulum inscriptum, eandem cum ipsa basin habentem eandemque altitudinem, hanc habet rationem; quam subsesquialtera duarum, lateris transversi & diametri portionis, ad eam quæ ex centro sectionis ducitur ad portionis centrum gravitatis.

Esto hyperboles portio, & inscriptus ei, qualem diximus, triangulus A B C; diameter autem portionis sit B D, & latus transversum sive diameter sectionis B E, in cujus medio centrum sectionis F. Et ponatur centrum gravitatis in [TAB. XXXIV. Fig. 8.]

portione punctum L. Dico portionem ad inscriptum triangulum A B C eam habere rationem, quam duæ tertiæ totius E D ad F L.

Constituatur enim ad diametrum, ut in præcedentibus, triangulus K F H; scilicet ut quadratum F G æquetur rectangulo E D B, & ut basis K H sit basi A C æqualis & parallela: ejusque trianguli sit centrum gravitatis M, sumptâ nimirum F M æquali duabus tertiis lineæ F G [1].

[1] 14. lib. 1. Arch. de Æquip.

Est itaque triangulus K F H ad A B C triangulum, ut F G ad B D: verùm ut F G ad B D, ita est E D ad F G, quia quadratum F G æquale est rectangulo E D B; & ut E D ad F G, ita sunt duæ tertiæ E D ad duas tertias F G, id est F M; ergo triangulus K F H ad triangulum A B C, ut duæ tertiæ E D ad F M. Est autem portio hyperboles ad triangulum K F H, ut F M ad F L [2], quoniam æquilibrium portionis & trianguli K F H est in puncto F [3], & centra gravitatis singulorum puncta L & M; ex æquali igitur in proportione perturbata, erit portio ad triangulum A B C, ut duæ tertiæ lineæ E D ad F L [4]: quod erat demonstrandum.

[2] 7. lib. 1. Archim. de Æquipond.

[3] Theor. 5. h.

[4] 23. lib. 5. Elem.

Theorema VII.

Omnis ellipsis vel circuli portio ad triangulum inscriptum, eandem cum ipsa basin habentem eandemque altitudinem, hanc habet rationem; quam subsesquialtera diametri portionis reliquæ, ad eam quæ ex figuræ centro ducitur ad centrum gravitatis in portione.

TAB. XXXV. Fig. 4. 5. Esto ellipsis vel circuli portio primùm dimidiâ figurâ non major, & inscriptus ei triangulus A B C, eandem cum portione basin habens, eandemque altitudinem; diameter autem portionis sit B D, quæ producatur, & manifestum est quod transibit per centrum figuræ; sit hoc F, & diameter portionis reliquæ D E. Et ponatur centrum gravitatis in portione

tione A B C punctum L. Dico igitur portionem ad inscriptum sibi triangulum A B C eam habere rationem, quam duæ tertiæ E D ad F L. Constituatur enim ut supra triangulus K F H, cujus nimirum basis K H sit basi A C æqualis & parallela, & F G quæ à vertice ad mediam basin pertingit possit rectangulum B D E: & centrum gravitatis trianguli K F H sit M punctum, sumptâ scilicet F M æquali duabus tertiis lineæ F G [1].

Triangulus igitur K F H est ad triangulum A B C, ut F G ad B D; ut autem F G ad B D, sic est E D ad F G, quia quadratum F G æquale est B D E rectangulo; & ut E D ad F G, sic sunt duæ tertiæ E D ad duas tertias F G, id est, ad F M. Ergo triangulus K F H ad triangulum A B C, sicut duæ tertiæ E D ad F M. Portio autem A B C est ad triangulum K F H, ut F M ad F L [2], quoniam æquilibrium eorum est in F [3], & centra gravitatis singulorum puncta L & M; Ergo ex æquali in proportione perturbata, erit portio A B C ad A B C triangulum, sicut duæ tertiæ E D ad F L [4].

Sit nunc portio A B C dimidiâ figurâ major. Dico eam rursus ad inscriptum triangulum eam habere rationem, quam duæ tertiæ E D ad F L.

TAB. XXXVI. Fig. 1, 2.

Ponatur enim portionis reliquæ A E C centrum gravitatis H punctum, & jungantur A E, E C. Igitur per ea quæ jam ostendimus, erit portio A E C ad A E C triangulum, ut duæ tertiæ B D ad F H; verùm ut triangulus A E C ad triangulum A B C, sic est E D ad B D, sive duæ tertiæ E D ad duas tertias B D; ex æquali igitur in proportione perturbata, erit sicut portio A E C ad triangulum A B C, ita duæ tertiæ E D ad F H [5]. Sed ut portio A B C ad A E C portionem, ita est F H ad F L [6], quoniam totius figuræ centrum gravitatis est F, centraque dictarum portionum L & H; Ergo iterum ex æquali in proportione perturbata, erit portio A B C ad A B C triangulum, ut duæ tertiæ E D ad F L. Omnis igitur Ellipsis vel circuli portio &c. Quod erat demonstrandum.

[1] 24. lib. 1. Arch. de Æquip.
[2] 7. lib. 1. Archim. de Æquipond.
[3] Theor. 5. h.
[4] 23. lib. 5. Elem.
[5] 23. lib. 5. Elem.
[6] 8. lib. 1. Arch. de Æquipond.

THEOREMA VIII.

In semicirculo & quolibet circuli sectore, habet arcus ad duas tertias rectæ sibi subtensæ hanc rationem, quam semidiameter ad eam, quæ ex centro ducitur ad sectoris centrum gravitatis.

TAB. XXXVI. Fig. 3. Esto primùm semicirculus A B C, descriptus centro D, sectusque bifariam rectâ B D, in qua centrum gravitatis semicirculi sit E [1]. Dico arcum A B C esse ad duas tertias A C, sicut B D ad D E. Jungantur enim A B, B C. Igitur, ut semicirculus ad triangulum A B C, sic sunt duæ tertiæ B D ad D E [2], est enim B D æqualis diametro portionis reliquæ. Verùm etiam ut semicirculus, id est, ut triangulus habens basin æqualem arcui A B C & altitudinem B D, ad A B C triangulum, ita est arcus A B C ad A C rectam; ergo ut arcus A B C ad A C, ita sunt duæ tertiæ B D ad D E, & permutando, ut arcus A B C ad duas tertias B D, ita A C ad D E, sive ita $\frac{2}{3}$ A C ad $\frac{2}{3}$ D E, unde rursus permutando, ut arcus A B C ad $\frac{2}{3}$ A C, ita $\frac{2}{3}$ B D ad $\frac{2}{3}$ D E, sive ita, B D ad D E.

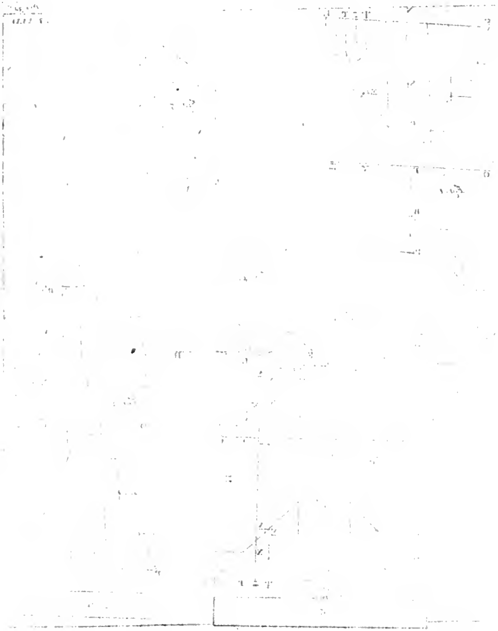
TAB. XXXVI. Fig. 4. Sit deinde sector D A B C, semicirculo minor, bifariam sectus rectâ D B, in qua sectoris centrum gravitatis ponatur E punctum, & ducatur subtensa A C. Dico rursus, arcum A B C ad duas tertias rectæ A C eam habere rationem, quam B D ad D E. Jungantur enim A B, B C, & totius circuli sit diameter K D B, quæ producatur in Q, ut fiat Q F, ad B F, sicut portio A C B ad A B C triangulum, & jungantur A Q, Q C; erit jam triangulus A Q C portioni A C B æqualis. Ponantur deinde centra gravitatis, G trianguli A C D, & H portionis A C B; & sicut D Q ad Q F, ita sit H D ad D R.

Quia igitur sicut portio A C B sive triangulus A Q C ad triangulum A B C, id est, ut Q F ad B F, ita $\frac{2}{3}$ K F ad D H [3], erit rectangulum sub Q F, D H, æquale duabus tertiis

[1] Theor. 4. h.

[2] Theor. 7. h.

[3] Theor. 7. h.



tertiis rectanguli K F B [4], id est, duabus tertiis quadrati [4] 16. lib. 6. Elem.
A F; sed idem rectangulum sub Q F, D H, æquale est re-
ctangulo Q D R, quia ut Q D ad Q F, ita fecimus esse
D H ad D R; ergo rectangulum Q D R æquale duabus ter-
tiis quadrati A F, ideoque ut Q D ad A F ita $\frac{2}{3}$ A F ad D R
[5]: sed ut Q D ad A F, sic quoque est rectangulum sub Q D, [5] 16. lib. 6. Elem.
A F, cui æquale quadrilaterum D A Q C, id est, sector
D A B C ad A F quadratum; ergo & sector D A B C ad
quadratum A F, ut $\frac{2}{3}$ A F ad D R. Porro quoniam E cen-
trum gravitatis est totius sectoris, & H centrum grav. por-
tionis A C B, G vero trianguli A C D, constat esse, sicut
triangulus A C D ad A C B portionem sive ad triangulum
A Q C, id est, ut D F ad F Q, ita H E ad E G [6]; quare [6] 8. lib. 1. Arch. de Æquipond.
convertendo & per compositionem rationis erit ut D Q ad
D F, ita G H, ad H E. Sed quia fecimus ut D Q ad Q F,
ita H D ad D R, erit quoque per conversionem rationis,
ut D Q ad D F, ita H D ad H R; ergo H D ad H R ut
G H ad H E; quare & reliqua G D ad reliquam E R, ut
H D ad H R [7], hoc est, ut D Q ad D F. Sicut autem D Q [7] 19. lib. 5. Elem.
ad D F, ita est quadrilaterum D A Q C, cui æqualis sector
D A B C ad A C D triangulum; igitur sector D A B C
ad A C D triangulum ut G D ad E R: Est autem A C D
triangulus ad D F quadratum, ut A F ad D F, sive ut $\frac{2}{3}$ A F
ad $\frac{2}{3}$ D F id est D G. Igitur ex æquali in proportione perturbata,
sicut sector D A B C ad quadratum D F, ita $\frac{2}{3}$ A F ad E R
[8], & convertendo, quadratum D F ad sectorem D A B C, [8] 23. lib. 5. Elem.
ut E R ad $\frac{2}{3}$ A F. Fuit autem ante ostensum, quadratum
A F esse ad sectorem D A B C, ut D R ad $\frac{2}{3}$ A F; igitur
duo simul quadrata, D F & A F, sive unum quadratum
D A ad sectorem D A B C ut duæ simul E R & R D, id
est ut tota E D ad $\frac{2}{3}$ A F [9]. Est verò etiam quadratum D A [9] 24 lib. 5. Elem.
ad D A B C sectorem, sicut linea D A ad arcum A B, quia
nimirum sector D A B C æqualis est rectangulo, basin ha-
benti æqualem arcui A B & altitudinem D A; ergo sicut
D A ad arcum A B, ita E D ad $\frac{2}{3}$ A F; & permutando,
arcus A B ad $\frac{2}{3}$ A F, sive arcus A B C ad $\frac{2}{3}$ A C, ut D A
vel B D ad D E. Ss 3 Esto

TAB. XXXVI. Fig. 5. Esto jam denique sector D A B C semicirculo major, & ponantur ea quæ priùs, & perficiatur circulus B A F C, & totius diameter sit B D F, in qua erit quoque centrum grav. sectoris reliqui D A F C [1], quot sit G.

Quia igitur circuli totius centrum gravitatis est D, & duorum sectorum centra grav. E & G, erit sicut sector D A B C, ad sectorem D A F C, id est, sicut arcus A B C ad arcum A F C, ita G D ad D E [2]: verum ut arcus A F C ad $\frac{2}{3}$ A C, ita est D F ad D G, sicuti modò ostensum est; ergo ex æquali in proportione perturbata, sicut arcus A B C ad $\frac{2}{3}$ A C, ita erit D F vel B D ad D E [3]. Constat itaque quod in semicirculo & quolibet circuli sectore &c. quod erat demonstrandum.

[1] 8. lib. 1. Arch. de Æquip.
[2] 8 lib. 1. Arch. de Æquip.
[3] 21. lib. 5. Elem.

Ἐ Ξ Έ Τ Α Σ Ι Σ
CYCLOMETRIÆ
CLARISSIMI VIRI,
GREGORII à S. VINCENTIO, S. J.

Editæ Anno D. cIↃ IↃC XLVII.

ANte quinquennium circiter Vir eruditissimus & Geometriâ celeberrimus, Gregorius à S. Vincentio, quatuor modos proposuit quadrandi Circulum, unum vero eorum etiam Quadraturæ Hyperboles applicavit: quem cæteris potiorem ab ipso existimari ex multis indiciis colligere licet. Unum est hoc ipsum quod duas diversarum figurarum quadraturas per eundem hunc demonstravit; alterum quod evidentior multò sit hic modus quam reliqui tres, ideoque minus errori obnoxius videri debuerit; nonnullum etiam quod primo eum loco produxit; Et denique hoc maximum est, quod in iis quæ ad lectorem in principio totius operis præfatur, ubi suæ inventionis

ventionis historiam & progressum paucis exposuit, nullius modi præter hunc unum meminerit. Potuit autem & aliam rationem habuisse tres posteriores quadraturas illic silentio prætereundi, eam videlicet, quod quatuor omnes sciret ex iisdem principiis deductas & demonstratas esse. Sed mihi vel alterutra harum considerationum sufficere visa est, ut persuaderet unam pro omnibus fore discussionem quæ quadraturam primariam infirmatura esset, reliquarum agmen ducentem. Si enim erratum in ea ostenderimus quæ minus obscuritatis habet, non video quâ ratione melior successus expectandus sit in tribus sequentibus, quæ maximâ caligine involvuntur, quasque Auctor ipse vel uni illi posthabere videtur. Principia quæ communia esse omnibus quadraturis dixi, ea sunt nova inventa de Proportionalitatibus Geometricis sive de Proportionum proportionibus, & de Ductibus plani in planum. Quæ quidem prorsus non impugnabo, nam & solida corpora quæcunque in Geometria considerare licere existimo, & alia omnia adhiberi posse, quæ modo ullo auxilio fore credimus ad investigationem veri. Unum tamen prætermittere nequeo quin dicam, Clar. Virum non satis feliciter quædam inventa in materia Proportionalitatum ad Quadraturam applicasse, atque hinc, meâ opinione, ipsi extitisse erroris causam. Primùm omnium id in propos. 39. lib. 10. Oper. Geom. * observaveram. Positis enim numeris fortuitò assumptis, 2, 3, 4, 5; deinde horum quadratis 4, 9, 16, 25; & quadratorum quadratis, 16, 81, 256, 625; videbam duodecim hisce eandem demonstrationem convenire, quæ in dicta prop. 39. scripta est de totidem parallelepipedis. Et quum tamen conclusio nullam idoneam admitteret interpretationem, non dubitabam quin æquè ipsius ac mea argumentatio, quam iisdem verbis formaveram, aliquid absurdi contineret. Posterior autem demonstrationis pars rectè se habebat, ideoque arguebat peccatum in

* In hac Propos. 39. etiam Cartesius paralogismum ostendit Epist. ad Schotenium.

in priori. Sed veritus ne intricata & prolixa hinc nobis disputatio oriretur, ad alias inventiones me converti, & tandem ea sese obtulerunt, quæ paucis hic perscribere constitui. Nulla per hæc propositionum Cl. Viri in controversiam vocabitur; sed contrà multis earum probatis, atque in usum meum conversis, eò rem deducam, ut si quidem non impossibile dicet quadraturam suam ad exitum perducere, & per eam reapse invenire rectilineum circulo æquale, ostendam quî id facillimè imposterum assequatur. Deinde vestigia ipsius insistens demonstrabo, quibus hactenus nobis præcessit, iis nequaquam ad optatum finem perveniri posse, sed esse subsistendum ad conclusiones perquam absurdas. Atque ut ad rem veniamus.

TAB. XXXVII. fig. 1. Esto circulus cujus centrum F, diameter C D. Et diviso radio F C bifariam in G, ducantur ipsi ad angulos rectos F E, G H. Dico, datâ ratione segmenti C H G ad G H E F segmentum, dari quoque rationem circuli ad inscriptum sibi hexagonum regulare. Junganturenim F H, H C, & manifestum est triangulum F H C fore æquilaterum; item quadrantis arcum C E triplum fore arcus H E. Si ergo data sit ratio segmenti C H G ad G H E F segmentum, componendo quoque, data erit ratio quadrantis F E C ad segmentum G H E F. Sed data quoque est ratio sectoris F H E ad quadrantem F E C, ergo datur quoque ratio segmenti G H E F ad sectorem F H E; ac proinde dabitur quoque ratio segmenti G H E F ad triangulum F H G; quare & ratio sectoris F H E ad triangulum F H G data erit. Sed huic rationi eadem est ratio sectoris F H C ad triangulum F C H, (quoniam hæc utriusque præcedentium dupla sunt;) eademque est circuli ratio ad hexagonum regulare sibi inscriptum. Ergo & hanc datam esse apparet: quod erat demonstrandum.

TAB. XXXVII. fig. 1. 2. Sunto nunc lineæ A B, C D, E F, singulæ æquales diametro circuli C D: & super unaquaque harum construantur bina quadrata. Deinde verticibus A & B describantur semiparabolæ A V G, B T H, quarum bases sint quadratorum latera

latera B G; A H. In duobus sequentibus quadratis ducantur diagonii C I, D K. Sed in postremis rursus semiparabolæ describantur E Σ L, F Π M, quarum vertices E & F, axes vero sint quadratorum latera E Ψ, F Ω, & bases Ψ L, Ω M. Porro divisis bifariam singulis lineis quæ ab initio positæ fuerunt; in N, O, P, & medietatibus rursus bifariam in Q, R, S, ducantur per divisionum puncta, quadratorum lateribus parallelæ, T V, X Y; Z Γ, Δ Θ, Π Σ, Λ Ξ.

Ostendit itaque Cl. V. in demonstr. prop. 52. lib. 10. Oper. Geom. & verissimum est, in circulo superiori segmentum C H G ad segmentum G H E F, eandem habere rationem quam habet hic solidum quod fit ex ductu plani A Y Q in planum A H X Q, ad solidum ortum ex ductu plani Q Y V N in planum Q X T N; sicut enim ille in suo schemate sumit æquales lineas *h i*, *k l*, ita nobis æquales sunt sumptæ in circulo, C G, G F, & hisce pares A Q, Q N.

Atque ut ipsa demonstrandi methodus quoque noscatur, ea hujusmodi est. In prop. 51. lib. 10. ostenditur, solidum quod fit ex ductu semiparabolæ A B G in semipar. A B H, æquari semicylindro, basin habenti semicirculum C E D & altitudinem C D. Deinde in Corollario ejusdem prop. idem quoque singulis partibus quod totis solidis convenire docetur. Nimirum id solidum quod fit ex ductu plani Q Y V N in planum Q X T N, æquatur quoque parti dicti semicylindri quæ insistit segmento G H E F; Itemque solidum ex ductu plani A Y Q in pl. A H X Q, æquatur ejusdem semicylindri parti quæ insistit segmento C H G. Quorum hoc vel ex eo constat, quod alioqui duo ista solida simul sumpta, hoc est, solidum ex ductu plani A V N in pl. A H T N, æquale non esset dimidio ejus quem diximus, semicylindri; & consequenter falsum quoque esset quod in confesso est, nimirum solidum ex ductu semiparab. A B G in semiparab. A B H æquari toti semicylindro. Apparet igitur, quoniam dictæ semicylindri partes eandem inter se rationem

habent quam bases quibus insistunt, certum esse quod diximus, segmentum circuli C H G ad G H E F, esse ut solidum ex ductu plani A Y Q in pl. A H X Q ad solidum ex ductu plani Q Y V N in pl. Q X T N.

Hæc ita enucleatè scribere volui, ne cui ignaro fortasse naturæ demonstrationum quibus Cl. V. utitur, scrupulus restare posset, quod ubi ille in d. prop. 52, lib. 10, duo circuli segmenta considerat, quale ferè est G H E F, ego pro altero eorum sumpserim segmentum C H G: Quodque in linea A B ab ipso termino A æquales partes capiam A Q, Q N. Ipsum autem Cl. Virum hæc remorari non possunt, neque hic, neque in sequentibus; quia cum in d. prop. 52. & 44, lib. 10. præcipit in linea *a b* æquales inter se sumi *h i*, *k l*, scit hoc nullam limitationem admittere; sicut & in schemate communi prop. 39, lib. 10, ubivis in linea *a b* sumitur *i k*, quæ dividitur in duas æquales *i m*, *m k*. Idem contingit in prop. sequenti 40.

Revertor autem ad propositum, & constat nunc quidem, si detur Ratio solidi quod fit ex ductu plani A Y Q in pl. A H X Q, ad solidum ex ductu plani Q Y V N in pl. Q X T N, eo ipso dari quoque rationem segmenti C H G ad segmentum G H E F, ac proinde continuò tunc inveniri posse quam rationem circulus habeat ad inscriptum hexagonum regulare.

Vocemus autem brevitatis gratia, id quod fieri diximus ex ductu plani A Y Q in planum A H X Q, solidum H Y. Item quod fit ex ductu plani Q Y V N in planum Q X T N, solidum X V. Similiter quod oritur ex ductu plani C Θ R in planum C K Δ R, vocemus solidum K Θ; eàdemque brevitate dicamus solida Δ Γ, M Ξ, Λ Σ, quibus quæ denotentur jam satis intelligitur.

His sic constitutis, sciendum est, omnem spem & fundamentum perficiendæ Quadraturæ Cl. Viro in eo positum esse, quod existimet rationem solidi H Y ad solidum X V (quam unicam tantum desiderari jam admonui) facile inveniri posse, si cognitæ sint duæ rationes hæ, nimirum ratio solidi

M Ξ

M Ξ ad ſol. Λ Σ, & ratio ſolidi K Θ ad ſol. Δ Γ. Sic enim tunc argumentabitur; Nota eſt ratio ſolidi M Ξ ad ſol. Λ Σ, item ratio ſolidi K Θ ad ſol. Δ Γ, ergo notum quoque quoties illa ratio hanc contineat; Quoties autem illa hanc continet toties hæc ipſa, ſcilicet ratio ſolidi K Θ ad ſol. Δ Γ, continet rationem ſolidi H Y ad X V; ergo & hæc ratio nota erit. Quomodo hæc intelligenda ſint paulò. inferiùs melius patebit, ubi eandem argumentationem repetemus. Interea certo ſcio, nihil horum quæ dixi mihi à Cl. V. negatum iri, modò conſideret in linea A B, ſumptas eſſe æquales inter ſe partes A Q, Q N, & hiſce pares C R, R O; E S, S P.

Si igitur indicavero ipſi quæ ſit ratio ſolidi M Ξ ad ſol. Λ Σ, item quæ ſit ratio ſolidi K Θ ad ſol. Δ Γ, & ne tum quidem dicere poſſit quam rationem habeat ſolidum H Y ad ſol. X V, fateatur ſane ſe fruſtra utramque Quadraturam tentaſſe, tam Circuli quam Hyperboles. Circuli; quoniam tunc videbit nequaquam procedere Propoſitionem 44. lib. 10. Oper. Geom. quæ vana & inanis erit, niſi ex notis rationibus ſolidi M Ξ ad ſol. Λ Σ, & ſolidi K Θ ad ſol. Δ Γ, innoteſcat ratio ſolidi H Y ad ſol. X V. Hyperboles vero; quoniam prop. 146. ejusd. lib. 10. cui hæc quadratura innititur, eadem eſt cum dicta prop. 44. & iiſdem verbis Hyperbolæ applicatur.

Sin vero datis iſtis duabus rationibus invenire poſthac potuerit rationem ſolidi H Y ad ſol. X V, tum ſe credat Circulum reverâ quadraviſſe. Nota enim ſic erit ratio ſegmenti C H G in circulo ad ſegmentum G H E F, & reliqua facile perficientur.

Dicam autem nunc ipſas Rationes. Et primam quidem, hoc eſt rationem ſolidi M Ξ ad ſol. Λ Σ, ajo eſſe eandem quæ numeri 53 ad 203. Alteram vero, rationem ſolidi K Θ ad ſol. Δ Γ, eam quæ 5 ad 11. atque horum utrumque infrà ſum demonſtraturus.

Priùs autem quod ab initio promiſi etiam oſtendam, hiſce Rationibus cognitis, tamen rationem ſol. H Y ad ſol. X V,

 per

per ea quidem quæ nos adhuc docuit V. Cl. inveniri non posse. Etenim inventurus ex datis rationibus, sol. Μ Ξ ad sol. Λ Σ, & solidi Κ Θ ad sol. Δ Γ, rationem tertiam solidi H Y ad sol. X V, in hunc modum ratiocinabitur, ut videre est ex demonstratione prop. 44. suprà citatæ, cui hunc casum convenire liquidò constat. Dicet enim, Notæ sunt prima & secunda ratio, (istæ enim sunt 53 ad 203, & 5 ad 11,) ergo notum quoque quoties prima secundam contineat. Sed quoties prima continet secundam, toties secunda continet tertiam, (hoc asserit prop. 40. lib. 10. oper. Geom.) Ergo notum quoque quoties secunda tertiam contineat. Quare cum nota sit secunda, etiam tertia nota erit, ea nimirum quam habet solidum H Y ad sol. X V.

Consequenter hoc nunc definiendum ei incumbet, Quoties Ratio harum prima secundam contineat; hoc est, quoties ratio 53 ad 203, contineat rationem 5 ad 11. Sed enim quo sensu verbum *continere* hìc explicaturus est? Num eo, ut idem significet quod alibi *continere per multiplicationem?* utque ratio 53 ad 203 rationem 5 ad 11. multiplicare dicatur vel bis (hoc est ut illa hujus sit duplicata, ita enim *continere* intelligendum videtur in propositione 40. lib. 10, modo citata) vel ter, vel quater, vel sæpiùs etiam. Et hoc quidem esse non potest; nam ratio 53 ad 203, rationis 5 ad 11, neque duplicata est neque triplicata vel ulterius multiplex, quum demum ratio 53 ad 256 $\frac{11}{25}$ sit duplicata rationis 5 ad 11.

An igitur verbum *Continere* in eum sensum trahet, quem habet in propositione 125. lib. 8. Oper. Geom.? Vix quidem illud suspicari possum; sed etiamsi vellet rursus inde absurdum consequetur. Nam secundum interpretationem istam; quoties ratio 53 ad 203 continet rationem 5 ad 11, toties hæc ipsa continebit rationem 5075 ad 6413; hoc autem patebit horum numerorum inter se rationis examinanti secundùm regulam dictæ propositionis 125. Esset igitur ratio solidi H Y ad sol. X V, hoc est, ratio segmenti circuli ab initio propositi C H G, ad segmentum G H E F, eadem quæ

5075

5075 ad 6413. Quare qualium partium ſegmentum C H G eſſet 5075, talium ſegmentum G H E F eſſet 6413; & proinde quadrans F C E 11488; & ſector F H E (qui quadrantis tertia pars eſt) $3829\frac{1}{3}$: & triangulum G H F $2583\frac{2}{3}$. Sicut autem ſector F H E ad triang. G H F, ita eſt ſector F H C ad triangul. F C H, & ita circulus C D ad inſcriptum ſibi hexagonum regulare. Ergo quoque qualium partium circulus C D eſſet $3829\frac{1}{3}$ talium hexagonum inſcriptum foret $2583\frac{2}{3}$. Qualium autem hexagonum inſcriptum eſt $2583\frac{2}{3}$, talium hexagonum regulare circumſcriptum eſt $3444\frac{8}{9}$; quoniam hoc inſcripti eſt ſeſquitertium: Ergo qualium partium circulus C D eſſet $3829\frac{1}{3}$, talium hexagonum circumſcriptum eſſet $3444\frac{8}{9}$, atque ita eſſet ipſo circulo minus, quod eſt abſurdum.

Manifeſtum igitur fecimus, ex duabus interpretationibus verbi *Continere*, neutram caſui noſtro accommodari poſſe. Aliam autem præter illas nullam in ſuo opere attulit; non docuit igitur modum determinandi, quoties ratio ſol. M Ξ ad ſol. Λ Σ contineat rationem ſol. K Θ ad ſolid. Δ Γ, ac proinde nec determinari poterit quoties hæc ratio contineat rationem ſolidi H Y ad ſolid. X V. Quare liquet, hanc rationem, ne duabus quidem prioribus iſtis datis, per inventa Clariſſ. Viri cognoſci poſſe: ideoque fruſtra ipſum ſperaſſe hoc modo perficere Circuli quadraturam.

Reſtat nunc tantùm ut manifeſta faciam quæ in præcedentibus poſita fuere, dixi enim me demonſtraturum, quod ſolidum M Ξ eſſet ad ſolid. Λ Σ, ut 53 ad 203: item quod ſolidum K Θ rationem haberet ad ſolidum Δ Γ, quam 5 ad 11.

Quoniam autem ad horum primi demonſtrationem neceſſarium eſt, ut notum habeamus, quæ ſit Ratio ungulæ Parabolicæ ad Cylindrum ſuum, qui baſi inſiſtit eidem, & eandem habet altitudinem; idcirco hanc Rationem declarantes, Tractatum Clariſſ. Viri, quem de eadem Ungula, Parte 5. lib. 9. propoſuit, uno egregrio Theoremate auctiorem reddemus, quod miror ipſum non inveniſſe, quum ex iis quæ jam

ostenderat facili negotio deducatur, ut jam statim apparebit.

TAB XXXVII. Fig. 3. Repetitâ enim quatenus hîc necesse erit figurâ ipsius, quæ est in propositione 99. lib. 9. Esto Cylindrus Parabolicus, bases oppositas habens parabolas A B D, V C E; à quo sit abscissa Ungula A B C D, eâdem basi & altitudine. Dico Cylindrum ad hanc Ungulam habere rationem duplam sesquialteram, sive quam 5 ad 2.

Transcriptis enim reliquis ex figura eadem, est F B diameter parabolæ A B D: & lineæ rectæ A B, B D. Ductâ porrò B C rectâ in superficie cylindri, sumptâque ejus quartâ parte C Q, abscinditur plano P Q N ungula P Q C N & junguntur C A, C D. Denique toti cylindro adjuncta est pyramis A D γ C æqualis parti B X D E C, quæ à cylindro abscissa est plano B D E C. Et hactenus quidem sufficiet nobis constructionem Cl. V.. repetiisse. Demonstravit autem hæc duo quæ sequuntur, sicut videre est in dicta prop. 99. lib. 9. Nimirum quod ungula A B C D est ad ungulam P Q C N, sicut 32 ad 1. Item quod hæc ungula P Q C N est ad pyramidem totam A γ D B C, (quæ composita est ex duabus pyramidibus A D B C & A D γ C) ut 1 ad 30.

Erit igitur ex æquo ungula A B C D ad pyramidem A γ D B C ut 32 ad 30, hoc est, ut 16 ad 15. Porrò cùm parabolæ A B D octava pars sit segmentum B D X, erit quoque segmentum solidum B X D E C vel huic æqualis pyramis A D γ C, octava pars cylindri totius parabolici A V C E D B: sed pyramis altera A D B C æquatur duabus octavis sive uni quartæ ejusdem parabolici cylindri; (est enim ipsa tertia pars sui prismatis, quod æquale est tribus quartis cylindri istius, ut ex quadratura parabolæ constat) ergo tota pyramis A γ D B C tribus octavis æquatur cylindri parab. A V C E D B. Cylindrus igitur parabolicus A V C E D B erit ad pyramidem A γ D B C, ut 8 ad 3, hoc est, ut 40 ad 15; sed ostensum est eandem pyramidem A γ D B C esse ad ungulam A B C D ut 15 ad 16. Igitur ex

ex æquo erit cylindrus parabolicus A V C E D B ad ungulam A B C D ut 40 ad 16, hoc eſt, ut 5 ad 2; quod fuit demonſtrandum.

Quæ hîc dixi à Cl. Viro oſtenſa fuiſſe, veriſſima ſunt, ac proinde non eſt quod de veritate hujus Theorematis dubitemus: Cujus aliam quoque demonſtr. adferre poſſem, longe ab iſta diverſam, niſi ad ſequentia properarem.

Repetitâ igitur parte ultimâ ſchematis, quod ſuprà deſcripſimus, ſit oſtendendum, quod ſolidum M Ξ, id eſt, quod oritur ex ductu plani E Ξ S in planum E M Λ S ad ſolidum Λ Σ, id eſt, quod oritur ex ductu plani S Ξ Σ P in planum S Λ Π P, eam habet rationem quam 53 ad 203. Deſcribatur ſuper E F parabola E Π F, axem habens P Π, quam conſtat eſſe quartam partem ipſius E F ſive M E. Erit igitur parabola E Π F eadem quam V. Cl. in prop. 41. & 42. lib. 10. notat literis A R B. Ait autem in dicta prop. 42. & veriſſimum eſt, ſolidum quod producitur ex ductu plani E Σ L F in planum F Π M E æquari ſolido quod fit ex parabola E Π F ducta in ſe ipſam: ſicut illud quoque quod ſubjungit in Coroll. 1. nimirum quod ſolidum ex plano S Ξ Σ P in planum S Λ Π P, æquatur ſolido ex ductu plani S Φ Π P in ſe ipſum; unde ſimiliter ſolidum ex plano E Ξ S in planum E M Λ S æquabitur ſolido ex plano E Φ S in ſe ipſum ducto. TAB. XXXVII. Fig. 2.

Oportet itaque oſtendere ſolidum ortum ex plano E Φ S ad ſolidum ex plano S Φ Π P, utroque in ſe ipſum ducto, eſſe ut 53 ad 203.

Eſto ungula parabolica A E F Π, cujus baſis parabola E Π F repetita ſit ex figura præcedenti, eodemque modo ut iſtic diviſa lineis Π P, Φ S. Sit autem altitudo ungulæ A Π dupla diametri baſis Π P. Erit igitur hæc ea ungula, quam intelligit in prop. dicta 42. lib. 10. ejuſdemque coroll. 2. fieri ex ductu parabolæ E Π F in ſe ipſam. Eâdem nimirum conſideratione uſus quæ eſt in Scholio propoſ. 19. lib. 9. Nam alioqui ex ejuſmodi ductu potius dicendum eſſet geminas ungulas produci, ſingulas altitudine æquales diame- TAB. XXXVII. Fig. 4.

tro

tro Π P. Ducto deinde plano per A Π P, & alio huic parallelo D Φ S secundum lineam Φ S, erit jam pars ungulæ hisce duobus planis terminata, æqualis solido quod fit ex ductu plani S Φ Π P in se ipsum; & pars ungulæ E D S Φ, æqualis ei solido quod fit ex ductu plani E Φ S in se ipsum. Quare nunc demonstrandum erit duntaxat, partem E D S Φ esse ad partem Φ A P ut 53 ad 203, Sit Φ N parallela E P, & N C parallela Π A. Ergo quoniam ex proprietate Paraboles, P N est $\frac{1}{4}$ Π P, erit quoque P C $\frac{1}{4}$ A P. Verùm &
* 11. 16. Lem. S D æquatur $\frac{3}{4}$ A P, quum sit huic parallela *, sitque parabola E A F: Itaque junctâ C D, ea parallela & æqualis erit lineis P S, N Φ. Ducatur secundùm D C planum D B C parallelum basi E Π F, fietque semiparabola B D C æqualis & similis semiparabolæ Π Φ N; & erit Φ B N dimidius cylindrus parabolicus: D A C B verò dimidiata ungula. Hæc autem æquatur sicut antea ostendimus, duabus quintis cylindri dimidiati, basin habentis D B C & altitudinem B A. Ergo quum semicylindrus Φ B N habeat altitudinem B Π triplam ipsius B A, erit ungula dimid. D A C B ad semicyl. Φ B N, ut 2 ad 15, hoc est, ut 8 ad 60.

Junctâ porro Φ Π, constat semiparabolam Π Φ N ad triangulum Π Φ N esse ut 4 ad 3; sed triangulus Π Φ N est ad rectangulum Φ P ut 1 ad 6, (est enim basis Π N tertia pars ipsius N P) hoc est, ut 3 ad 18. Ergo ex æquo erit semiparab. Π Φ N ad rectang. Φ P ut 4 ad 18. Itaque & semicylindrus Φ B N est ad parallelepipedum ejusdem altitudinis super basi Φ P, ut 4 ad 18. Dicti autem parallelepipedi dimidium est prisma D N S; ergo semicylindrus Φ B N est ad prisma D N S, ut 4 ad 9, hoc est, ut 60 ut 135. Qualium igitur partium dimidiata ungula D A C B erat 8, talium semicylindrus parab. Φ B N erat 60, (ut suprà ostensum est) taliumque prisma D N S erit 135. Ac proinde solidum A Π S D, quod ex istis tribus componitur, erit 203. Est autem ungula dimidiata A D C B ad dimidiatam ungulam E A P Π, ut 1 ad 32, sicut Cl. Vir. demonstravit in prop. 95. lib. 9. Ergo qualium partium ungula dimid.

A D C B

A D C B est 8, talium erit dimid. ungula E A P Π 256, quoniam ut 1 ad 32, ita est 8 ad 256. Diximus autem partem sol. A Π S D esse talium 203. Igitur dim. ungula E A P Π est ad partem A Π S D ut 256 ad 203; & dividendo pars reliqua E D S Φ ad partem A Π S D, ut 53 ad 203; quod erat demonstr. Ostendimus igitur illud quoque solidum, quod suprà diximus fieri ex ductu plani E Ξ S in planum E M Λ S, eam habere rationem ad solidum ortum ex ductu plani S Ξ Σ P in planum S Λ Π P, quam 53 ad 203.

Tandem ad alterum eorum quæ demonstrare promisimus accedamus, repetitâque parte mediâ schematis triplicis quod suprà descriptum fuit, ostendendum sit; solidum ortum ex ductu plani C Θ R in planum C K Δ R, ad solidum ex ductu plani R Θ Γ O in planum R Δ Z O eam habere rationem, quam 5 ad 11. Supra latus C D trianguli C D I, erigatur ad perpendiculum triangulum C K D, & jungatur K I. Erit jam pyramis C D I K illud solidum quod intelligitur fieri ex ductu trianguli C D I in triangulum C D K. Etenim sectâ pyramide plano A Z O Γ secundum O Γ, quod rectum sit ad basin C D I, erit sectio quadratum, id est, rectangul. quod fit ex lineis Γ O, O Z; eademque sectio dividet pyramidem bifariam. Secta item plano E Δ R Θ priori parallelo, secundùm lineam R Θ, existet inde rectangulum E R, quale continetur lineis Θ R, R Δ. Oportet itaque ostendere, quòd solidum K C R E Δ est ad solidum Δ A O Θ Δ, ut 5 ad 11. TAB. XXXVII. Fig. 2. Fig. 5.

Ducatur secundùm E Δ planum Δ E B parallelum basi C D I; abscindet illud pyramidem B E Δ K similem toti pyramidi C I D K, quæque proinde erit ad hanc in triplicata ratione laterum homologorum B Δ ad C D. Sed B Δ, cum sit æqualis ipsi C R, quarta pars est lateris C D. Itaque qualium partium pyramis B E Δ K est unius, talium pyramis C I D K erit 64: & dimidium hujus, hoc est, solidum K A O C erit 32. Qualium autem pyramis B E Δ K est unius talium quoque prisma B E R est 9; quoniam basin habent communem B E Δ, & prismatis altitudo B C tri-

pla est ad altitudinem pyramidis B K. Ergo solidum K C R E Δ quod ex hisce duobus componitur, erit partium 10, qualium solidum K A O C est 32. Apparet igitur hoc esse ad illud ut 16 ad 5; ideoque dividendo & convertendo solidum K C R E Δ esse ad solidum Δ A O Θ Δ, ut 5 ad 11: quod erat ostendendum.

F I N I S.

CHRISTIANI HUGENII,

CONST. F.

AD

C. V. FRAN. XAVERIUM

AINSCOM. S.I.

EPISTOLA,

Qua diluuntur ea quibus Ἐξέτασις Cyclometriæ *Gregorii à S^to. Vincentio* impugnata fuit.

CHRISTIANI HUGENII,

CONST. F.

AD

C. V. FRAN. XAVERIUM
AINSCOM. S. I.

EPISTOLA.

Cl. Viro D°. XAVERIO AINSCOM CHRISTIANUS HUGENIUS S. D.

Liber ille quem non ita pridem tuo nomine huc misit Apelles vester Segerus, tam mihi acceptus fuit, Vir Clariss. quam solent esse ea quorum diutina expectatio desiderium auget. Jam diu enim intellexeram te Quadraturæ Vincentianæ patrocinium suscepisse, novissiméque & Lovanio & Romà significatum fuerat opus illud jam penè à te ad umbilicum perductum, in quo pars etiam quædam nostræ Exetasi dicata esset. Itaque cum avide totum commentarium tuum evolvi, tum accuratius reliquis illa expendi quæ propius ad me pertinebant. De quibus quid visum fuerit breviter tibi perscribere constitui. Equidem miratus sum, cum me non ultimum inter eos recenseas qui cæteris solidius in examinanda Quadratura vestra versati sint, postea tamen adeo nihili animadversiones omnes meas, omniáque argumenta prædicare, ut quod convellere nituntur, id ne attingant quidem. Nempe ego totâ viâ, totoque, quod ajunt, cœlo erravi, quemque refutare volui, ejus mentem minime sum assecutus. Veruntamen Viri Doctissimi funditus evertisse me commenta vestra pronunciavere, quorum judiciis, etsi vos fortasse non statis, apud intelligentes tamen multo pluris futura reor quam eo-

lib. 8. qui totus eſt de Proportionalitatibus.

Porro ſuperfluam me ais operam ſumpſiſſe, cum priores duas corporum rationes numero exhibui, ex quibus tertia vobis definienda erat; illas enim autor operis Geometrici, ſi credimus, multo antè quàm ego edidiſſem, imo quàm ipſe editus eſſem, perſpectas habuit aliiſque demonſtravit. Quæſo cur non explicuit igitur, noſque ea levavit moleſtia? Nam certum erat plurimum ad abſolvendam quadraturam, ſi modo abſolvi poſſet, eorum notitiam conferre debere, planeque eſſe neceſſariam. Sed vobis cuncta perinde nota dici video quæ cognoſci poſſe aliquâ ſaltem ratione imaginamini, atque ea quæ liquido comperta fuerint. Itaque ad propoſ. 43. lib. 10. me remittis, in qua utramque rationem notam fieri aſſeris. Illa vero non magis ipſas expedit quam propoſitio poſtrema ejuſdem libri, rationem quæ ſit inter circulum & quadratum diametri. Prorſus huic ſimile eſt quod de Parabolica ungula reſpondes. Videlicet jam à triginta annis exploratum habuiſſe autorem tuum, quænam ſit illius ad cylindrum ſuum proportio. Equidem ex iis quæ jam tradiderat, erui illam poſſe faſſus ſum; ipſum vero adhuc cujuſmodi foret neſciviſſe, ſatis evidens argumentum videbatur, quod eam non exprimeret. Neque enim credibile, cujus theorematis gratia duodeviginti propoſitiones elucubraſſet, id tanquam ſuperfluum non eſſe adſcripturum, ſi tam nullo negotio inveniri poſſe ſperaret. Parum intererat utrum propoſitione illud dignatus fuiſſet, (quod noluiſſe eum dicis) an corollario tantum. Sed nec in corollario ratio illa uſpiam expreſſa eſt. Nam in eo quod adducis, hoc ſolum legitur, methodum traditam eſſe qua ratio ungulæ ad cylindrum quo continetur, inveſtigari queat, eamque notam fore, ſi quorundam inter ſe corporum rationes inventæ fuerint. Atqui & horum corporum rationes, & ex iis quæ ſit inter ungulam cylindrumque ſuum analogia, lectoribus diſquirenda relinquuntur: idque ipſe non neſcis. Quare non ſatis ingenue hic me diſſimulationis arguis, ubi ipſe contra quam ſentias, ſcribere videaris.

Jam vero de *palmari* errore quem mihi impingis videamus.

mus. Is circa verbum *continere* commiſſus eſt, ex quo non recte percepto factum eſt ſcilicet, ut, cum Quadraturam veſtram oppugnare me crederem, nihil minus egerim, omnesque item, qui me labefeciſſe eam judicarunt, cæcutierint. Ego ſignificationem duplicem ejus verbi quam in opere Geometrico inveneram, adduxi, tuam, quæ & P. Sarraſæ eſt, interpretationem, quoniam adhuc ignorabam, præterii. Igitur hic *palmaris* eſt error meus, quod nec P. Sarraſæ librum, nec tuum Corollarium tum temporis videram. Sed nec fortaſſe ſi ſciviſſem explicationem veſtram, propterea memorandam duxiſſem, cum parum adeo ad rem faciat, ſitque monſtroſa plane atque abſona, uti ex adjecto ſpecimine liquebit: quantum vero ea promoveritis deinde exponam. Propoſitio 40. lib. 10. eſt hujuſmodi. *Iiſdem poſitis, dico rationem ſolidi ex* R S *in* X Y *ad ſolidum ex* T V *in* Z &, *toties continere rationem ſolidi ex* I K *in* N O *ad ſolidum ex* L M *in* P Q, *quoties hæc ipſa ratio continet rationem ſolidi ex* A B *in* E F *ad ſolidum ex* C D *in* G H. Quam propoſitionem *juxta mentem*, ut ais, *autoris*, (variatâ tantùm phraſi ſcilicet) ſic nobis enarras. *Iiſdem poſitis, dico rationem ſolidi ex* R S *in* X Y *ad ſolidum ex* T V *in* Z &, *conſtitui ex iis rationibus quæ toties multiplicatæ ſunt illarum rationum ex quibus conſtituitur ratio ſolidi ex* I K *in* N O *ad ſolidum ex* L M *in* P Q, *quoties hæ ipſæ rationes multiplicatæ ſunt earum ex quibus conſtituitur ratio ſolidi ex* A B *in* E F *ad ſolidum ex* C D *in* G H.

Pulchra vero explanatio! quam quia ego pervidere non valui, ſenſum convenientem ratiociniis veſtris non percepi. At cui hoc in mentem veniret, Mathematicum longe aliud ſcribere quam intelligi poſtulet? quiſve magis adhuc intricatum ſenſum theorematibus jam nunc nimium obſcuris affingere vellet? Omnes profecto qui vobis controverſiam moverunt, haud aliter atque ego, verbum *continere* accepiſſe noſti, neque ulli hoc incidiſſe, ut cum de ratione inter duas magnitudines legeret, id ad *partiales* referret, ex quibus *totales* conſtituerentur. Ecce vero ut præter eos quorum animadverſiones ad manus veſtras pervenere, eadem plane quæ nobis,

nobis, circa has propositiones & significationem verbi *continere*, opinio fuit Incomparabili Cartesio, quem si minus insignem Geometram quam *Algebristam* fuisse arbitraris, parum ex vero judicas. Ejus ad amicum epistolæ copia mihi facta est, cum jam diu exetasis nostra prodiisset, quâ quoniam non tantum id quod dixi comprobatur, sed & tota insuper ad opus Geometricum P. à S.to Vincentio pertinet, integram hic adscribere visum est. Gallicè sic habet.

MONSIEUR.

J'*Ay gardé vos livres un peu long temps, pource que je desirois en vous les renvoyant, vous rendre compte de la Quadrature du cercle pretendue, & j'avois bien de la peine à me resoudre de feuilleter tout le gros volume qui en traite. En fin j'en ay veu quelque chose & assez ce me semble pour pouvoir dire qu'il ne contient rien de bon qui ne soit facile, & qu'on ne pust escrire tout en une ou deux pages. Le reste n'est qu'un paralogisme touchant la Quadrature du cercle, enveloppé en quantité de propositions qui ne servent qu'à embroüiller la matiere, & sont tres simples & faciles pour la pluspart, bien que la façon dont il les traite, les face paroistre un peu obscures. Pour trouver son paralogisme, j'ai commencé par la* 1134.e *page, ou il dit: Nota autem est proportio segmenti* LMNK *ad segmentum* EGHF, *ce qui est faux, & la preuve qu'il en donne est fondée sur la* 39.e *proposition en la page* 1121. *du mesme livre, ou il y a une erreur tres manifeste, qui consiste en ce qu'il veut appliquer à plusieurs quantitez conjointes ce qu'il a prouvé auparavant des mesmes quantitez divisées. Car par exemple, ayant les* 4. *ordres de proportionelles*

2, 4, 8, & 2, 8, 32.
2, 6, 18, 2, 10, 50.

bien qu'il soit vray que 8. *est à* 32. *en raison duoblée de ce que* 4. *est à* 8. *Et que* 18. *est aussi à* 50. *en raison doublée de ce que* 6. *est à* 10. *il n'est pas vray pour cela que* 8 † 18. *c'est à dire* 26. *soit à* 32 † 50. *c'est à dire* 82. *en raison double de celle qui est entre* 4 † 6. *c'est à dire* 10, *&* 8 † 10, *c'est à dire* 18. *Tous ses raisonnements ne sont fondez que sur cette faute, & ce qu'il escrit de*

Proportionalitatibus & de Ductibus, ne sert qu' à l'embarasser, & ne me semble d'aucun usage, pour ce que frustra fit per plura quod potest fieri per pauciora.

Quorum latinè hæc est sententia.

Libros tuos retinui diutius, quod remittere eos nolebam quin simul opinionem meam tibi exponerem de nova ista quam venditant circuli Quadratura; vix autem à me ipso impetrare poteram, ut ingentia quibus tractatur volumina evolverem. Tandem tamen nonnulla in iis delibavi, è quibus satis tutò mihi pronunciare posse videor, nihil ibi boni inveniri, quod non captu facile sit; unâque aut alterâ paginâ explicari potuerit. Cætera merum paralogismum de quadratura circuli continent, multis propositionibus implicitum, quæque hoc tantum efficiunt, ut omnia evadant intricatiora. Pleræque vero simplicissimæ sunt & facili ratione constant, licet tractandi methodus obscuriores reddiderit. Paralogismum quærere institui, initio facto ad paginam 1134. *ubi hoc ait: Nota autem est proportio segmenti* L M N K *ad segmentum* E G H F; *quod falsum est, pendet enim hujus demonstratio à propositione* 39, *pag.* 1121. *ejusdem libri, ubi manifestus error occurrit, dum pluribus quantitatibus conjunctim applicatur, quod de singulis seorsim fuerat ostensum. Etenim ex. gr. positis quatuor proportionalium ordinibus* 2, 4, 8, & 2, 8, 32,
2, 6, 18, 2, 10, 50,
licet verum sit rationem 8. *ad* 32. *duplicatam esse ejus quæ* 4. *ad* 8. *itemque rationem* 18. *ad* 50. *duplicatam esse ejus quæ* 6. *ad* 10. *non tamen idcirco verum est* 8 † 18. *hoc est*, 26. *esse ad* 32 † 50. *hoc est ad* 82. *in ratione duplicata ejus quæ* 4 † 6. *hoc est*, 10. *ad* 8 † 10. *hoc est*, 18. *Unicum ei fundamentum hæc vitiosa argumentatio; quæque de Proportionalitatibus scribit & de Ductibus, tantum majoribus ipsum difficultatibus involvunt, neque alicujus usus videntur, siquidem frustra fit per plura quod potest fieri per pauciora.*

Vides, Vir Egregie, neque Cartesium, vestrum illud *Hoc est juxta mentem autoris*, agniturum fuisse, sed potius, quod res est, dicturum, desperatâ causâ hoc vobis effugium quæsitum, ut quadratura vestra ad instar Protei cujusdem aliâ atque

aliâ

aliâ assumptâ formâ quantumlibet arctè sese constringentibus elaberetur. Verum age, inspiciamus jam quo rem deducas, posteaquam verbi *continere* novam significationem elicuisti, eâque vetera theoremata tam scitè interpolasti. In Corollario propositionis 40. lib. 10. quò tam sæpe provocas, id unum egisse videris, unas ex aliis difficultates nectendo, ut si quis argumentationis tuæ tenorem consectari cupiat, is defessus absistat priusquam ad finem pervenerit. Ego ad eum usque locum te secutus sum, ubi spatia Y & Z assumi jubes: Inde non ulterius procedendum putavi. Adeo enim manifesto vitio atque ἀγεωμετρησίᾳ ibi laborat constructio tua, ut tibimet ipsi exploratum id esse dubitare nequeam: sed quoniam alia evadendi ratio non occurrebat, sperasti, credo, in tanta obscuritate nemini illud facile animadversum iri. *Dein*, inquis, *assumantur duo plana Hyperbolica* Y & Z, *rectis alteri asymptotorum parallelis inclusa*. Nullâ aliâ præcautione assumuntur quam quod rectis alteri asymptotorum parallelis includi ea necesse sit. De magnitudine utriusque aut ratione quam inter se servare debeant nihil præcipis. Igitur quamlibet magnum aut parvum unum quodque eorum abscindi poterit. Mox tamen rationem spatii Y ad Z cum aliis rationibus comparare instituis, quas prius secundum certam determinationem assumpsisti, tibique hoc demonstrandum proponis, *Rationem totalem planorum* X *ad* T *tam esse multiplicem rationis totalis planorum* Y *ad* Z, *quàm ratio totalis solidorum* G H *ad* I K *multiplicata est rationis totalis solidi* L M *ad* N O. Quidnam, quæso, absurdius, quam de quantitate ejus rationis aliquid enunciare, quæ prorsus incerta sit ac vaga? Equidem ex hoc solo satis liquere puto, quam frustra primæ Quadraturæ suppetias ferre tentaveris, cum in eo quod præcipuè tibi explicandum erat, tam insigniter delinquas. In tribus reliquis an meliore fortunâ usus sis, si me inquirere oporteat, talentum non meream. Id tamen scito perpetuum adversus vos argumentum fore, quod rationem peripheriæ ad diametrum quam singulis quadraturis datam esse profitemini, ipsi tamen exhibere non potestis; non autor ipse Quadraturæ, non tot ejus discipuli, qui tot jam annis in id incumbunt, ut paucioribus Ilium expugnatum sit. Datam esse rationem, Euclides definivit, cui

possumus æqualem invenire. Quis autem ad vestram illam hoc pertinere credet, quæ irrito labore toto decennio quæsita est? Nam quod sufficere existimatis si modo viam commonstraveritis quâ emensâ ad quæsitum perveniatur, obstacula vero, atque innumeras difficultates quibus præsepta est, non removetis, videte cui persuadere possitis, eâ ratione tetragonismi negotium à vobis confectum esse. Illud sanè vos consequi apparet, ut, dum ultra non proceditis, minus expositi sitis ad promiscuos omnium insultus, difficilius etiam à peritioribus oppugnemini, paratioremque habeatis receptum. Facile enim acrius instantes proportionum & proportionalitatum vestrarum tenebris involvere potestis, atque efficere ut tandem veluti nox prælium dirimat. Hoc ipsum ne mihi eveniret, cum exetasin Quadraturæ conscriberem, metuebam, atque ut caverem operam dedi; id unum conatus, ut, quatenus fieri posset, autorem ad absurdum compellerem, nimirum ut vel nolle se vel non posse Quadraturam suam absolvere fateretur. Eo fine ignota prius atque informia corpora dimensus sum, exhibitisque prioribus duabus solidorum proportionibus, petii ut inde tertiam eliceret, utpote quàm cognitis illis notam dixisset. Ad quas angustias redactum non aliâ ratione defendis, quam expostulando mecum quod autori tuo modum præscribere præsumam quadrandi circulum, ac jubendo denique ut meminerim *quid* & *cui* scribam. Ego verò quomodo quadratus fiat circulus, nec didici, nec præscribo; sed hoc urgeo; ut quem ille modum se invenisse contendit, eum reapse utilem & efficacem esse demonstret. Atque ita, quid scripserim & in quem finem, me non nescivisse, satis jam tibi constare arbitror. Cui vero scripserim, ne hoc quidem puto me oblitum fuisse. Vides autem quam hac in parte longe diversum sonent Cartesii literæ atque Elogia vestra: quorum utris potius subscribendum sit aliorum judicio decerni malim quam meum interponere. Hoc tamen autorem Quadraturæ scire velim, tanto majori eruditionis & candoris opinione apud me futurum, quanto maturius ab errore suo resipiscet. Vale.

Dat. Hagæ-Com. 2. Oct. 1656.

CHRISTIANI HUGENII,
CONST. F.

DE

CIRCULI MAGNITUDINE INVENTA.

ACCEDUNT EJUSDEM

Problematum quorundam illuſtrium Conſtructiones.

PRÆFATIO.

Circa antiquum Tetragoniſmi problema, quo vel apud Mathematum ignaros nihil eſt celebrius, recens operæ pretium nos feciſſe rati, & quædam hactenus compertis meliora ut putamus conſecuti, Geometris ea demonſtrata impertiri volumus. Namque & ſtudiis eorum profutura arbitramur, & novitate ipſâ ad rerum abditarum inveſtigationem incitamento futura, reputantibus in eo quoque argumento, ubi omnes pridem ſummâ contentione verſati ſint, aliqua ſuperfuiſſe haud indigna diligentiæ præmia. Plurimi quidem antehac inventæ Quadraturæ gloriam ſibi aſſerere conati ſunt, variaque ſubinde commenta protulere, falſis vera miſcentes. Verum à peritioribus omnia vel everſa fuiſſe vel contempta ſcimus, neque aliud adhuc receptum, quo omnis circuli dimenſio niteretur, præter unum illud, majorem eſſe eum inſcripto ſibi polygono, circumſcripto minorem. Nos autem propiorem determinationem nunc exhibemus oſtendimuſque, quod duobus ſumptis polygonis proportione mediis inter inſcriptum circumſcriptumque ipſis ſimile, minoris eorum perimeter circumferentia circuli major exiſtit, reliquum vero

ro

ro polygonum eâdem proportione circuli aream exuperat. *Et hoc quidem ut inter ea quæ demonstraturi sumus & difficillimum & contemplatione præcipue dignum videatur, alia tamen sunt non accuratiora modò, sed quæ & usu magis probentur; quæ sane hic in antecessum non recensebimus, quippe in sequentibus rectius percipienda. Breviter tamen quid studiis Geometriæ conferant exposuisse proderit, cum non minimam habeant utilitatis commendationem. Cum igitur duplicem propositi tractationem instituerimus, primum ea tradendo quorum demonstratio consuetis Geometriæ elementis contenta est, deinde centrorum gravitatis quoque considerationem adhibendo: in prioribus quidem illud explicatum reperietur, quomodo non tantum circumferentiæ toti, sed & arcui cuilibet dato recta linea æqualis invenienda sit; expeditâ ratione ad Mechanicas constructiones, quæque vel subtilissimas earum minime frustretur. Quomodo item numeros exercentibus peripheriæ ad diametrum ratio, quam Archimedes ex polygonis laterum* 96 *eruit, per dodecagona sola comprobari queat. Ex polygonis autem laterum* 10800, *cum iis qui veterem insistunt viam vix hi peripheriæ termini existant* 62831852 & 62831855, *ad diametrum partium* 20000000, *nostrâ Methodo isti prodiisse cernentur*, 6283185307179584, 6283185307179589; *semperque duplicem obtineri verorum characterum numerum, quacunque laterum multitudine polygona*

gona adhibeantur. Quod quidem certâ ratione contingere perſpeximus ſicuti & quadratum cujuſque numeri bis totidem quot latus characteribus plerumque conſtituitur. At majora etiam compendia centrorum gravitatis proprietas ſubminiſtrat, & propius quodammodo ad perfectionem inſuperabilis problematis per hæc acceſſiſſe videmur. Certe ad Archimedeos peripheriæ limites conſtituendos, ſolo nunc inſcripti trigoni cognito latere indigemus. E ſexagintangulo autem inter hoſce eam contineri probamus 31415926538 & 31415926533, *poſitâ diametro partium* 10000000000, *cum ſolitâ methodo vix iſti producantur* 3145, 3140. *Adeo ut triplus jam & ultra ſit verarum hîc notarum numerus, ſicut per præcedentia duplus; & perpetuo quidem ſucceſſu, haud aliter quam in majoribus numeris cubum ſui lateris triplum eſſe animadvertitur. Ergo poſthac ſi qui falsò circumferentiæ magnitudinem definient, per numeroſa polygona non refutabuntur, ſed calculo brevi minimèque intricato, quemque erroris inſimulare, quod hactenus ferè ſoliti ſunt, haud facile poſſint. Ad hæc ſi quid in ſubtenſarum Canone, quem emendatum haberi quantum referat omnes ſciunt, in eo contexendo ſi quid erit admiſſum aut aliunde perverſum irrepſerit, non difficile erit horum ope reſtituere, cum aliâ nunc ratione ex inſcriptis in circulo longitudinem arcuum quibus ſubtenduntur invenire liceat. Quinimo & omni Canonum auxilio deſtitutis oſten-*

ostendimus, quo pacto ex lateribus triangulorum datis angulos eorum investigare queant, ut nunquam duorum secundorum scrupulorum sit à vero dissensus, sæpe ne unius quidem tertii. Et hæc quidem non levia commoda visum iri confidimus. Comperimus autem & Renatum Cartesium, cujus viri inventis cum Philosophia universa tum Mathesis plurimùm illustrata est, nonnulla quæ huc spectent scriptis mandasse. Ea vero defuncto ipso in commentariis reperta feruntur, neque adhuc rescire potuimus quâ industriâ aut eventu hisce manum admoverit. Willebrordi autem Snellii geometræ eruditi Cyclometricus extat, multo labore conscriptus, quique omnis in his est. Atque ille non exiguam laudem promeritus videretur, si præcipua duo theoremata, quibus omne id opus velut fundamentis superstructum est, demonstrare potuisset. Sed quas ibi pro demonstrationibus haberi postulat, propositum minime comprobant: ipsa vero theoremata, sicut in utroque evidenti ratione nos ostendimus, præclaram continent veritatem. Et ea quidem sequentibus meritò inserenda putavimus, quod causæ eorum à nostris pendeant inventis.

CHRI-

CHRISTIANI HUGENII,
CONST. F.

DE

CIRCULI MAGNITUDINE INVENTA.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

SI Circuli portioni, semicirculo minori, triangulum maximum inscribatur; & portionibus reliquis triangula similiter inscribantur, erit triangulum primo descriptum duorum simul quæ in portionibus reliquis descripta sunt minus quam quadruplum.

Esto circuli portio A B C, semicirculo minor, cujus diameter B D; maximum autem inscriptum sit triangulum A B C, hoc est, quod basin & altitudinem habeat cum portione eandem. Et reliquis duabus portionibus inscribantur triangula item maxima A E B, B F C. Dico triangulum A B C minus esse quam quadruplum triangulorum A E B, B F C simul sumptorum. Jungatur enim E F, quæ secet diametrum portionis in puncto G. Quoniam igitur arcus A B bifariam dividitur in E puncto, erit utraque harum E A, E B, major dimidiâ A B. Quamobrem quadratum A B minus erit quam quadruplum quadrati E B vel E A. Sicut autem quadratum A B ad quadr. E B, ita est D B ad B G longitudine; quia quadratum quidem A B æquale est rectangulo quod à D B & circuli totius diametro continetur, quadratum vero E B æquale rectangulo sub eadem diametro & recta B G. Minor igitur est B D quam quadrupla B G. Sed & A C minor est quam dupla E F, quoniam hæc ipsi A B æquatur. Ergo patet triangulum A B C minus esse quam octuplum tri-

TAB. XXXVIII. Fig. 1.

 anguli

anguli E B F. Huic autem triangulo æquantur singula A E B, B F C. Ergo utriusque simul triangulum A B C minus erit quam quadruplum. Quod erat ostendendum.

THEOR. II. PROP. II.

Si fuerit circuli portio, semicirculo minor, & super eadem basi triangulum, cujus latera portionem contingant; ducatur autem quæ contingat portionem in vertice: Hæc à triangulo dicto triangulum abscindet majus dimidio maximi trianguli intra portionem descripti.

TAB. XXXVIII. Fig. 2. Esto circuli portio semicirculo minor A B C, cujus vertex B. Et contingant portionem ad terminos basis rectæ A E, C E, quæ conveniant in E: convenient enim quia portio semicirculo minor est. Porro ducatur F G, quæ contingat ipsam in vertice B;& jungantur A B, B C. Ostendendum est itaque, triangulum F E G majus esse dimidio trianguli A B C. Constat triangula A E C, F E G, item A F B, B G C æquicruria esse, dividique F G ad B bifariam. Utraque autem simul F E, E G, major est quam F G; ergo E F major quam F B, vel quam F A. Tota igitur A E minor quam dupla F E. Quare triangulum F E G majus erit quarta parte trianguli A E C. Sicut autem F A ad A E, ita est altitudo trianguli A B C ad altitudinem trianguli A E C, & basis utrique eadem A C. Ergo, quum F A sit minor quam subdupla totius A E, erit triangulum A B C minus dimidio triangulo A E C. Hujus vero quarta parte majus erat triangulum F E G. Ergo triangulum F E G majus dimidio trianguli A B C. Quod ostendendum fuit.

THEOR. III. PROP. III.

Omnis circuli portio, semicirculo minor, ad maximum triangulum inscriptum majorem rationem habet quam sesquitertiam.

Esto

Esto Circuli portio, semicirculo minor, cui maximum sit inscriptum triangulum A B C. Dico portionem ad dictum triangulum majorem rationem habere quam quatuor ad tria. Inscribantur enim & reliquis portionibus duabus maxima triangula A D B, B E C. Itaque minus est triangulum A B C quàm illorum simul quadruplum *: ac proinde spatium aliquod adjungi potest triangulo A B C, quod una cum ipso minus etiam sit quam quadruplum dictorum simul triangulorum A D B, B E C. Esto itaque eà ratione adjectum triangulum A F C, ut totum spatium A B C F minus sit quam quadruplum triangulorum A D B, B E C. Et porro in residuis portionibus maxima triangula inscribi intelligantur; itemque in residuis semper, donec portiones quibus postremùm inscribentur simul minores sint triangulo A C F, hoc enim fieri potest. Itaque & triangula postremùm inscripta simul triangulo A C F minora erunt. Quia autem spatii A B C F quarta parte majora sunt duo simul triangula A D B, B E C. Rursusque quarta horum parte majora triangula quatuor, quæ portionibus reliquis inscribuntur. Et horum quartâ majora similiter, quæ deinceps: atque ita continue, si plura fuerint descripta. Erit propterea spatium ex quadrilatero A B C F & cæteris inscriptis triangulis, & triente eorum, quæ postremò inscripta erunt, compositum, majus quam sesquitertium ipsius quadrilateri A B C F. Hoc enim ab Archimede demonstratum est, quod si fuerint spatia quotcunque in ratione quadrupla, ea omnia simul cum triente minimi ad maximum rationem habebunt sesquitertiam. Dividendo itaque, triangula omnia intra portiones A D B, B E C descripta cum triente postremo discriptorum majora erunt tertia parte spatii A B C F. Sed triens dictus minor est triente trianguli A C F. Igitur dempto illinc triente postremò inscriptorum; à spatio autem A B C F ablato triangulo A F C, erunt triangula omnia intra portiones A D B, B E C descripta, majora triente trianguli A B C *. Quare componendo, tota figura rectilinea portioni A B C inscripta major quam sesquitertia trianguli A B C, multoque magis portio ipsa. Quod erat demonstrandum.

TAB. XXXVIII. Fig. 1.

* pr. 1. huj.

* 33. 5. Elem.

 Theor.

THEOR. IV. PROP. IV.

Omnis circuli portio, semicirculo minor, minor est duabus tertiis trianguli eandem cum ipsa basin habentis, & latera portionem contingentia.

TAB. XXXVIII. Fig. 4.

Esto circuli portio, semicirculo minor, A B C, & contingant ipsam ad terminos basis rectæ A D, C D, quæ conveniant in puncto D. Dico Portionem A B C minorem esse duabus tertiis trianguli A D C. Ducatur enim E F quæ portionem contingat in vertice B, & inscribatur ipsi triangulum maximum A B C. Quum igitur triangulum E D F majus sit dimidio trianguli A B C *, manifestum est ab illo partem abscindi posse, ita ut reliquum tamen majus sit dimidio dicti A B C trianguli. Sit igitur hoc pacto abscissum triangulum E D G. Et ducantur porro rectæ H I, K L, quæ portiones reliquas A M B, B N C in verticibus suis contingant, ipsisque portionibus triangula maxima inscribantur. Idemque prorsus circa reliquas portiones fieri intelligatur, donec tandem portiones residuæ simul minores sint quam duplum trianguli E D G. Erit igitur inscripta portioni figura quædam rectilinea, atque alia circumscripta. Et quoniam triangulum E G F majus est dimidio trianguli A B C; & rursus triangula H E I, K F L, majora quam dimidia triangulorum A M B, B N C; idque eadem semper ratione in reliquis locum habet, ut triangula super portionum verticibus constituta, eorum quæ intra portiones ipsas descripta sunt, majora sint quam subdupla: apparet triangula omnia extra portionem posita etiam absque triangulo E G D majora simul esse quam dimidia triangulorum omnium intra portionem descriptorum. Atqui segmentorum in portione reliquorum triangulum quoque E G D majus est quam subduplum. Ergo triangulum E D F simul cum reliquis triangulis, quæ sunt extra portionem, majus erit dimidio portionis totius A B C. Quare multo magis spatium à rectis

* per. 2. huj.

rectis A D, D C & arcu A B C comprehensum majus erit portionis A B C dimidio. Ac proinde triangulum A D C majus quàm portionis A B C sesquialterum. Quod erat demonstrandum.

THEOR. V. PROP. V.

Omnis circulus major est pylogono æqualium laterum sibi inscripto & triente excessus quo id polygonum superat aliud inscriptum subduplo laterum numero.

Esto circulus centro C; sitque ipsi inscriptum polygonum æqualium laterum, quorum unum sit A B. Atque alterum item polygonum sit inscriptum, cujus bina latera A D, D B, subtendat A B. Hoc igitur priore polygono majus est. Sit autem excessus trienti æquale H spatium. Dico circulum majorem esse polygono A D B una cum spatio H. Ducantur enim ex centro rectæ C A, C B. Quoniam igitur portio circuli A D B major est quam sesquitertia trianguli A D B sibi inscripti *; erunt portiones A D, D B, simul majores triente trianguli A D B. Quamobrem & sector C A B major erit utrisque simul quadrilatero C A D B & triente trianguli A D B. Sicut autem sector C A B ad circulum totum, ita est quadrilaterum C D B A ad polygonum A D B, & ita quoque triens trianguli A D B ad trientem excessus polygoni A D B supra polygonum A B. Ergo manifestum est circulum quoque totum majorem fore polygono A D B una cum triente excessus quo polygonum A D B superat polygonum A B, hoc est, unà cum spatio H. Quod erat demonstrandum.

TAB. XXXVIII. Fig. 5.

* per. 3. huj.

THEOR. VI. PROP. VI.

Omnis circulus minor est duabus tertiis polygoni æqualium laterum sibi circumscripti & triente polygoni similis inscripti.

Esto

TAB. XXXVIII. Fig. 6. Esto circulus cujus centrum A, & inscribatur ipsi polygonum lateribus æqualibus, quorum unum sit B C; & aliud simile circumscribatur F E G, cujus latera circulum contingant ad occursum angulorum polygoni prioris. Dico circulum minorem esse duabus tertiis polygoni F E G simul cum triente polygoni B C. Ducantur namque ex centro rectæ A B, A C. Igitur quoniam super basi portionis B D C consistit triangulum B E C, cujus latera portionem contingunt, erit ipsa minor duabus tertiis trianguli B E C *. Itaque si triangulo A B C addantur duæ tertiæ trianguli B E C, hoc est, duæ tertiæ excessus quadrilateri A B E C supra triangulum A B C, ex utrisque compositum spatium majus erit sectore circuli A B C. Idem est autem, sive triangulo A B C addantur duæ tertiæ excessus dicti, sive addantur duæ tertiæ quadrilateri A B E C, contraque auferantur duæ tertiæ trianguli A B C: hinc autem fiunt duæ tertiæ quadrilateri A B E C cum triente trianguli A B C. Ergo apparet sectorem A B C minorem esse duabus tertiis quadrilateri A B E C & triente trianguli A B C. Quare sumptis omnibus quoties sector A B C circulo continetur, totus quoque circulus minor erit duabus tertiis polygoni circumscripti F E G & triente inscripti B C. Quod erat ostendendum.

* Per. 4. huj.

Theor. VII. Prop. VII.

Omnis circuli circumferentia major est perimetro polygoni æqualium laterum sibi inscripti, & triente excessus quo perimeter eadem superat perimetrum alterius polygoni inscripti subduplo laterum numero.

TAB. XXXVIII. Fig. 7. Esto circulus A B, centro O, cui inscribatur polygonum æquilaterum A C D, atque alterum duplo laterum numero A E C B D F. Sitque recta G I æqualis perimetro polygoni A E C B D F, G H vero æqualis perimetro polygoni

goni A C D. Excessus igitur perimetrorum est H I; cujus triens I K adjiciatur ipsi G I. Dico totâ G K majorem esse circuli A B circumferentiam. Inscribatur enim circulo tertium polygonum æquilaterum A L E M C, quod sit duplo numero laterum polygoni A E C B D F. Et super lineis G H, H I, I K, triangula constituantur quorum communis vertex N, altitudo autem æqualis semidiametro circuli A B. Igitur quoniam G H basis æqualis est perimetro polygoni A C D, erit triangulum G N H æquale polygono, cui bis totidem sunt latera, hoc est, polygono A E C B D F. Hoc enim patet, ductis ex centro rectis O A & O E, quarum hæc secet A C in P. Nam triangulum quidem A E O æquale est triangulo basin habenti A P & altitudinem radii O E. Quanta autem pars est triangulum A E O polygoni A E C B D F, eadem est recta A P perimetri A C D. Itaque polygonum A E C B D F æquabitur triangulo cujus basis æqualis perimetro A C D, altitudo autem radio E O: hoc est, triangulo G N H. Eâdem ratione, quoniam basis G I est æqualis polygoni A E C B D F perimetro, & altitudo trianguli G N I æqualis radio circuli, erit triangulum G N I æquale polygono A L E M C. Itaque triangulum H N I æquale excessui polygoni A L E M C supra polygonum A E C B D F. Trianguli autem H N I subtriplum est ex constr. triangulum I N K. Ergo hoc æquale erit dicti excessus trienti. Quare totum triangulum G N K minus erit circulo A B *. Altitudo autem trianguli æqualis est circuli semidiametro. Ergo evidens est rectam G K totâ circuli circumferentiâ minorem esse. Quod erat ostendendum.

* per 5. huj.

Hinc manifestum est, si à sesquitertio laterum polygoni circulo inscripti auferatur triens laterum polygoni alterius inscripti subduplo laterum numero, reliquum circumferentiâ minus esse. Idem enim est, sive perimetro majori addatur $\frac{1}{3}$ excessus quo ipsa superat perimetrum minorem, sive addatur $\frac{1}{3}$ perimetri majoris contraque auferatur $\frac{1}{3}$ perimetri minoris. Hinc autem fit sesquitertium majoris perimetri mi-

nus triente minoris. Quare si à sexdecim inscripti dodecagoni lateribus duo latera inscripti hexagoni, hoc est, diameter circuli deducatur, reliqua circuli circumferentiâ minor erit, aut si ab octo dodecagoni lateribus radius deducatur, reliqua minor erit circumferentiæ semisse. Hoc autem ad constructionem mechanicam utile est, quoniam exigua est differentia, sicut postea ostendetur.

Manifestum etiam, in omni arcu qui semicircumferentiâ minor sit, si ad subtensam addatur triens excessus quo subtensa sinum superat, compositam arcu minorem esse.

Theor. VIII. Prop. VIII.

Circulo dato, si ad diametri terminum contingens ducatur, ducatur autem & ab opposito diametri termino quæ circumferentiam secet occurratque tangenti ductæ: erunt interceptæ tangentis duæ tertiæ cum triente ejus quæ ab intersectionis puncto diametro ad angulos rectos incidet, simul arcu abscisso adjacente majores.

Tab. XXXVIII. Fig. 1. Esto circulus centro A, diametro B C; & ducatur ex C recta quæ circulum contingat C D: huic autem occurrat ducta ab altero diametri termino recta B D, quæ circumferentiam secet in E: sitque E F diametro B C ad angulos rectos. Dico tangentis interceptæ C D duas tertias simul cum triente ipsius E F, arcu E C majores esse. Jungantur enim A E, E C; & ducatur tangens circulum in E puncto, quæ tangenti C D occurrat in G. Erit igitur G E ipsi G C æqualis, itemque D G; nam si centro G circumferentia describatur quæ transeat per puncta C, E, eadem transibit quoque per D punctum, quoniam angulus C E D rectus est. Ostensum autem fuit suprà, duas tertias quadrilateri A E G C una cum triente trianguli A E C simul majores esse sectore A E C *. Estque quadrilaterum A E G C æquale triangulo basin habenti

* per 6. huj.

benti duplam C G, hoc eſt, C D, & altitudinem C A: triangulum vero A E C æquale triangulo baſin ipſi E F æqualem habenti & altitudinem dictam A C. Itaque apparet duas tertias quadrilateri A E G C ſimul cum triente trianguli A E C æquari triangulo qui baſin habeat compoſitam ex duabus tertiis C D & triente E F, altitudinem vero radii A C. Quare ejuſmodi quoque triangulum majus erit ſectore A E C. Unde liquet baſin ipſius, hoc eſt, compoſitam ex duabus tertiis ipſius C D & triente ipſius E F, majorem eſſe arcu C E. Quod erat demonſtrandum.

Theor. IX. Prop. IX.

Omnis circuli circumferentia minor eſt duabus tertiis perimetri polygoni æqualium laterum ſibi inſcripti & triente perimetri polygoni ſimilis circumſcripti.

Eſto Circulus cujus A centrum; & inſcribatur ei polygonum æquilaterum, cujus latus C D: ſimileque aliud circumſcribatur lateribus ad priora parallelis, quorum unum ſit E F. Dico circuli totius circumferentiam minorem eſſe duabus tertiis ambitus polygoni C D & triente ambitus polygoni E F. Ducatur namque diameter circuli B G, quæ ſimul inſcripti polygoni latus C D medium dividat in H, & circumſcripti latus E F in G, (conſtat autem G fore punctum contactus lateris E F,) Et ponatur H L æqualis ipſi H G, & jungantur A C, B C & producantur, occurrátque B C lateri E F in K, producta autem A C incidet in E angulum polygoni circumſcripti. Quoniam igitur H L æqualis H G, erit B L dupla ipſius A H: Ideoque ut G A ad A H, ita G B ad B L. Major autem eſt ratio H B ad B L, quam G B ad B H; quoniam hæ tres ſeſe æqualiter excedunt G B, H B, L B. Itaque major erit ratio G B ad B L, hoc eſt, G A ad A H, quam duplicata rationis G B ad B H. Sicut autem G A ad A H, ita eſt E G ad C H; & ſicut G B TAB. XXXIX. Fig. 1.

ad B H, ita K G ad C H. Ergo major erit ratio E G ad C H, quam duplicata ejus, quam habet K G ad C H. Quare major ratio E G ad K G, quam K G ad C H. Ideoque duæ simul E G, C H omnino majores duplâ K G. Et sumptis omnium trientibus, erunt trientes utriusque E G & C H simul majores duabus tertiis K G. Quamobrem addito utrimque ipsius C H triente, erit triens E G cum duabus tertiis C H, major duabus tertiis K G cum triente C H. Hisce vero minor etiam est arcus C G *. Igitur duæ tertiæ C H simul cum triente ipsius E G majores omnino sunt eodem arcu C G. Unde sumptis omnibus toties quoties arcus C G circumferentiâ totâ continetur, erunt quoque duæ tertiæ perimetri polygoni C D, cum triente perimetri polygoni E F, majores circuli totius circumferentiâ. Quod fuerat ostendendum.

* per praeced.

Omnis igitur circumferentiæ arcus quadrante minor, minor est sinus sui besse & tangentis triente.

Problema I. Prop. X.

Peripheriæ ad diametrum rationem invenire quamlibet veræ propinquam.

Minorem esse peripheriæ ad diametrum rationem quam triplam sesquiseptimam: majorem vero quam $3\frac{10}{71}$, Archimedes ostendit inscripto circumscriptoque 96 laterum polygono. Idem verò hic per dodecagona demonstrabimus.

Quia enim latus inscripti circulo dodecagoni majus est partibus $5176\frac{3}{8}$, qualium radius continet 10000: duodecim latera proinde, hoc est, perimeter inscripti dodecagoni major erit quam $62116\frac{1}{2}$: perimeter autem hexagoni inscripti est radii sextupla, ideoque partium 60000. Igitur dodecagoni perimeter perimetrum hexagoni excedit amplius quam partibus $2116\frac{1}{2}$. Quare triens excessus major erit quam $705\frac{1}{2}$. Igitur dodecagoni perimeter unà cum triente excessus, quo perimetrum hexagoni superat, major erit aggregato partium

62116'

$62116\frac{1}{2}$ & $705\frac{1}{2}$, hoc est, partibus 62822. Atque hisce proinde omnino major erit circuli peripheria *. Est autem major ratio 62822 ad 20000, longitudinem diametri, quam $3\frac{10}{71}$ ad 1. Ergo omnino etiam peripheriæ ad diametrum ratio major erit. * *per 7. huj.*

Rursus quoniam latus dodecagoni inscripti minus est partibus $5176\frac{2}{5}$. Erunt octo latera, hoc est, $\frac{2}{3}$ perimetri minora quam $41411\frac{1}{5}$. Item quia latus dodecagoni circumscripti minus est quam 5359, erunt quatuor latera, hoc est, triens perimetri minor quam 21436. Quamobrem $\frac{2}{3}$ perimetri dodecagoni inscripti cum triente perimetri circumscripti minores erunt quam $62847\frac{1}{5}$. Sed istis simul minor etiam est circuli circumferentia *. Ergo hæc ad diametrum omnino minorem habebit rationem, quam $62847\frac{1}{5}$ ad 20000; & multo minorem proinde, quam $62857\frac{1}{7}$ ad 20000, hoc est, quam triplam sesquiseptimam. Demonstrati itaque sunt termini Rationis peripheriæ ad diametrum, quos Archimedes statuit. Eosdem verò postmodum solius inscripti trigoni æquilateri latere indagato comprobabimus. Porrò ut propinquior inveniatur ratio plurium laterum polygona consideranda sunt. Intelligatur igitur circumscriptum circulo polygonum aliudque inscriptum laterum 60. Et præter hæc subduplo numero laterum inscriptum, nempe trigintangulum. * *per 9. huj.*

Et invenitur quidem latus inscripti sexagintanguli majus partibus 10467191, qualium radius 100000000 & latus trigintanguli minus quam 20905693: cujus dimidium $10452846\frac{1}{2}$ est sinus arcus æquantis $\frac{1}{60}$ circumferentiæ. Subtensa autem erat 10467191. Ergo differentia $14344\frac{1}{2}$ minor verâ: & triens differentiæ $4781\frac{1}{2}$, qui additus ad subtensam 10467191 facit $10471972\frac{1}{2}$. Quibus itaque major est arcus $\frac{1}{60}$ circumferentiæ. Ductis autem $10471972\frac{1}{2}$ sexagies fiunt 628318250. Hisce igitur partibus omnino major est circumferentia tota.

Rursus quoniam latus inscripti 60 anguli minus est quam 10467192, erunt duæ tertiæ ipsius minores quam 6978128. Circumscripti autem 60 anguli latus cum sit minus quam 10481556, erit triens ipsius minor quam 3493852. Quibus

 addi-

additis ad 6978128, fiunt 10471980. Hæ igitur omnino excedunt $\frac{1}{6}$ circumferentiæ, & sexagecuplum ipsarum, hoc est 628318800 majus erit circumferentiâ totâ. Quod si verò polygona adhibeamus laterum 10800, quorum inscripti quidem latus, calculo Ludolphi Coloniensis, Arithmetici nobilis, inventum est partium 58177640912684919 non unâ amplius, subtenditurque duobus scrup. primis; circumscripti autem latus 58177643374063182 non unâ minus. Prætereaque latus polygoni subduplo laterum numero inscripti, quod est 116355276902613523 non unâ minus. Hinc peripheriæ longitudo invenitur major quam partium 62831853071795843 minor autem quam 62831853071795895, qualium radius 10000000000000000. Solitâ autem methodo ex additis inscripti circumscriptique polygoni istius lateribus, invenietur tantum majorem esse peripheriam partibus 62831852, & minorem 62831855. Patet igitur notarum verarum amplius quam duplum numerum esse à nobis inventum. Hoc autem & in præcedentibus ita se habet, semperque evenire necesse est quotcunque laterum polygonis utamur. At per ea, quæ postea trademus, triplum numerum notarum facile obtineri apparebit.

Problema II. Prop. XI.

Rectam sumere peripheriæ dati circuli æqualem.

Ostensum est superius, quod octo inscripti dodecagoni latera dempto circuli radio minora sunt peripheriâ dimidiâ. In constructione autem ut plurimum defectus animadverti nequit. Nam si quatermillesima diametri pars accedat longitudini sic inventæ, jam dimidiam peripheriam excedet. Quod sic fiet manifestum. Quarum partium radius est 10000, earum latus dodecagoni inscripti circulo est amplius quam $5176\frac{3}{8}$. Unde latera octo majora quam 41411. & dempto radio 10000, erit reliqua major quam 31411. cui si addantur partes 5, hoc est, $\frac{1}{4000}$ diametri, fient jam 31416; quibus minorem esse circumferentiam dimidiam liquet ex præcedentibus. Latus autem

tem dodecagoni inſcripti facile invenitur, quia radius peripheriæ ſextantem ſubtendit. Eſtque hæc ratio accuratior quam ſi triplâ ſeſquiſeptimâ utamur. Nam ſecundum eam excedetur $\frac{1}{2}$ peripheriæ longitudo amplius quam $\frac{1}{100}$ diametri.

A l i t e r.

Eſto datus circulus cujus B C diameter. Dividatur ſemicircumferentia B C bifariam in D. reliqua vero trifariam in E & F. Et jungantur D E, D F, quæ ſecent diametrum in G & H. Erit trianguli G D H latus alterum una cum baſi G H quadrante B D exiguo majus, neque enim excedet $\frac{1}{5000}$ diametri B C. Sciendum eſt enim fieri D G vel D H duobus inſcripti dodecagoni lateribus æquales. G H autem lateri dodecagoni circumſcripti. Unde quidem junctas D G & G H majores eſſe conſtat quadrante B D. Nam quia per 8. huj. octo latera dodecagoni circulo inſcripti cum quatuor lateribus circumſcripti majora ſunt peripheriâ totâ, ideo ſumptâ omnium quartâ parte erunt quoque duo latera inſcripti cum latere uno circumſcripti majora peripheriæ quadrante. Porro quoniam latus inſcripti dodecagoni minus eſt quam partium 51764 qualium B C 200000: erunt latera duo, hoc eſt, G D, minor quam 103528. Circumſcripti autem dodecagoni latus minus eſt partibus 53590, ipſa nimirum G H. Itaque junctæ una D G, G H efficiunt minus quam 157118. At quadrantem B D conſtat ex præcedentibus majorem eſſe quam 157079. Ergo differentia minor eſt quam partium 39, cum 40 demum efficiant $\frac{1}{5000}$ diametri B C.

TAB. XXXIX. Fig. 2.

A l i t e r.

Tribus ſemidiametris addatur $\frac{1}{10}$ lateris inſcripti quadrati; compoſita ſemicircumferentiæ æquabitur tam propè, ut non $\frac{1}{10000}$ diametri brevior ſit. Latus quadrati eſt majus quam partium 141421 qualium radius 100000, unde quod dictum eſt facile demonſtratur.

Vel

Vel potius sex semidiametris addatur $\frac{1}{3}$ dicti lateris quadrati inscripti ut habeatur recta æqualis peripheriæ toti.

PROBLEMA III. PROP. XII.

Dato arcui cuicunque rectam æqualem sumere.

TAB. XXXIX. Fig. 1. Esto datus circumferentiæ arcus C D, primum quadrante minor, cui rectam æqualem sumere oporteat. Dividatur arcus C D bifariam in E, sitque subtensæ C D æqualis recta F G. Duabus vero C E, E D, quæ subtendunt arcus dimidios, æqualis F H. Et ipsi F H jungatur H I triens excessus G H. Erit tota F I arcui C D æqualis ferè: adeo ut unâ sui particulâ, qualium 1200 continet, aucta, major futura sit, etiamsi arcus C D quadranti æqualis detur. In minoribus autem arcubus minor erit differentia. Nam si fuerit datus non major peripheriæ sextante, linea inventa minus quam $\frac{1}{2658}$ sui parte à vera arcus longitudine deficiet. Et minores quidem esse arcubus rectas eo modo inventas constat ex Theoremate 7. huj. De quantitate autem differentiæ est ostendendum.

Primum itaque ponendo arcum C D quadranti peripheriæ æqualem, erit C D recta, hoc est, F G, latus quadrati circulo inscripti, & minor proinde quam partium 141422, qualium radius circuli 100000. C E autem vel E D latus inscripti octogoni, ideoque major quam 76536. Est autem duplæ E D æqualis F H. Ergo hæc major quam 153072. Quare excessus G H major quam 11650: Et hujus triens H I major quam 3883. Ideoque tota F I major quam 156955. Arcus autem C D cum quadranti æqualis ponitur, minor est quam 157080. Itaque minus ab hoc discrepat recta F I quam partibus 125, qualium ipsa est 156955. Quæ utique minus efficiunt quam $\frac{1}{1255}$ ipsius F I.

Si vero sextans peripheriæ sit arcus C D, erit recta C D, hoc est, F G, latus hexagoni inscripti, ideoque partium 10000, & C E vel E D latus dodecagoni, ac proinde major

jor quam $5176\frac{1}{6}$. cujus dupla F H major quam $10352\frac{1}{3}$. unde G H major quam $352\frac{3}{4}$; & H I major quam $117\frac{7}{11}$. Tota igitur F I major quam $10470\frac{1}{3}$. Arcus autem C D, sextans peripheriæ, minor est quam 10472. Ergo deficiunt lineæ F I partium earundem pauciores quam $1\frac{2}{3}$. Quæ non æquant $\frac{1}{5236}$ F I. Porro cum arcus quadrante major datus erit, dividendus est in partes æquales 4 vel 6 vel plures, prout accuratiori dimensione uti voluerimus; sed numero pares: Earumque partium subtensis simul sumptis adjungendus est triens excessus quo ipsæ superant aggregatum earum quæ arcubus duplis subtenduntur. Ita namque componetur longitudo arcus totius. Vel hac etiam ratione eadem habebitur, si arcus reliqui ad semicircumferentiam longitudo inveniatur aut supra eandem excessus, aut reliqui ad circumferentiam totam, si dodrante major fuerit datus; eaque longitudo adjungatur vel auferatur à dimidiæ vel totius circumferentiæ longitudine, quam antea invenire docuimus.

Theor. X. Prop. XIII.

Latus Polygoni æquilateri circulo inscripti, proportione medium est inter latus polygoni similis circumscripti, & dimidium latus polygoni inscripti subduplo laterum numero.

In circulo cujus centrum A, radius A B, sit latus inscripti polygoni æquilateri B C; & latus circumscripti similis polygoni D E ipsi B C parallelum. Ergo producta A B transibit per D, & A C per E. Et si ducatur C F ipsi A B ad angulos rectos, ea erit dimidium latus polygoni inscripti subduplo numero laterum. Itaque ostendendum est, B C mediam esse proportione inter E D & C F. Ducatur A G, quæ dividat E D bifariam, itaque erit ipsa quoque circuli semidiameter & æqualis A B. Et quoniam est ut E D ad C B, sic D A ad A B, hoc est, D A ad A G; sicut autem D A TAB. XXXIX. Fig. 1.

ad A G, ita B C ad C F, propter triangulos similes D A G, B C F. Erit proinde ut E D ad C B, ita quoque C B ad C F. Quod erat demonstrandum.

Lemma.

Tab. XXXIX. Fig. 5.

Esto linea B C divisa æqualiter in R, & inæqualiter in F, sitque segmentum majus F C; & fiat B O æqualis utrique simul B C, C F; B M vero utrique B C, C R. Dico majorem esse rationem R B ad B F, quam triplicatam ejus, quam habet O B ad B M. Sumatur enim ipsi O M æqualis utraque harum M L, L P. Quoniam igitur M O ipsi R F æqualis est, (nam hoc ex constructione intelligitur) erit P O tripla ipsius F R. Sed & B M tripla est B R. Ergo ut B R ad B M, ita F R ad P O. Et permutando ut B R ad F R, sic B M ad P O. Major autem est B O quam B M. Ergo major erit ratio B O ad O P, quam B R ad R F; & per conversionem rationis minor O B ad B P, quam R B ad B F. Porro quoniam æquales sunt O M, M L, major erit ratio B O ad O M, quam B M ad M L: & per conversionem rationis minor O B ad B M, quam M B ad B L. Eodem modo minor adhuc ostendetur ratio M B ad B L, quam L B ad B P. Itaque omnino ratio triplicata ejus quam habet O B ad B M minor erit quam composita ex rationibus O B ad B M, B M ad B L, & B L ad B P, hoc est, quam ratio O B ad B P. Major autem erat R B ad B F, quam O B ad B P. Ergo omnino major erit ratio R B ad B F, quam triplicata rationis O B ad B M. Quod erat propositum.

Theor. XI. Prop. XIV.

Omnis circuli circumferentia minor est minore duarum mediarum proportionalium inter perimetros polygonorum similium, quorum alterum ordinate circulo inscriptum sit, alterum circumscriptum.

ptum. Et circulus minor est polygono istis simili cujus ambitus majori mediarum æquetur.

Esto circulus B D, cujus centrum A. Et inscribatur ei polygonum æquilaterum B C D L, simileque circumscribatur lateribus parallelis H K M N. Sitque perimetro polygoni H K M N æqualis recta T, perimetro autem B C D L æqualis Z. Et inter Z & T duæ sint mediæ proportionales X & V, quarum X minor. Dico circumferentiam circuli B D minorem esse rectâ X. Et si fiat polygonum in quo Y, cujus perimeter æquetur rectæ V, simile autem sit polygono B C D L aut H K M N; Dico circulum B N minorem haberi polygono Y. Ducatur enim diameter circuli P E, quæ dividat bifariam latera parallela B C, H K, inscripti circumscriptique polygoni in R & E; erit autem E punctum contactus lateris H K, & B C secabitur in R ad angulos rectos. Ducatur etiam ex centro recta A C K, quæ utriusque polygoni angulos C & K bifariam secet, nam hoc ab eadem recta fieri constat; & jungatur C E. Ipsi autem C E ponatur æqualis C F; sitque duabus his C R, C F tertia proportionalis C G. Ergo qualis polygoni inscripti latus est C E sive C F, talis circumscripti latus erit C G*. Ideoque duæ tertiæ C F cum triente C G simul majores erunt arcu E C *. Sit autem duabus tertiis C F cum triente C G æqualis recta S. Ergo & hæc major erit arcu E C.

TAB. XXXIX. Fig. 6.

* per 11 huj.

* per 9. huj.

Et quoniam se habet C R ad C F, ut C F ad C G; erit quoque dupla C R una cum C F ad triplam C R, hoc est, utraque simul B C, C F ad utramque B C, C R, ut dupla C F una cum C G ad triplam C F: vel sumptis horum trientibus, ut $\frac{2}{3}$ C F una cum $\frac{1}{3}$ C G ad C F, hoc est, ut S ad C F. Quare etiam triplicata ratio ejus quam habet utraque simul B C, C F ad utramque B C, C R eadem erit triplicatæ rationi S ad C F. Major autem est ratio R B ad B F quam triplicata ejus, quam habet utraque simul B C, C F ad utramque B C, C R *. Ergo major eadem ratio R B ad B F quam triplicata ejus quam habet S ad

* per lemma præc.

C F, hoc est, quam cubi S ad cubum C F. Sicut autem R B ad B F, ita est cubus R B ad id quod fit ex quadrato R B in B F. Ergo major quoque ratio cubi R B ad quadratum R B in B F, quam cubi S ad cubum C F. Quadrato autem R B in B F minus est rectangulum sub R B, B G, in F C; quod sic ostenditur. Quia enim proportionales sunt R C, C F, C G, Erit id quo major mediam excedit, hoc est F G, major quam quo media minimam, hoc est, quam F R. Major autem est F C quam F B. Ergo omnino major erit ratio C F ad F R, quam B F ad F G. Et per conversionem rationis, minor ratio F C ad C R, quam F B ad B G. Et permutando minor F C ad F B, quam C R seu R B ad B G: hoc est, (sumptâ communi altitudine B R) quam quadrati R B ad rectangulum R B G. Unde quod fit ex rectangulo R B G in F C minus erit quam quod ex quadrato R B in F B, uti dictum fuit. Quum itaque major ostensa fuerit ratio cubi R B ad quadratum R B in B F, quam cubi S ad cubum C F; omnino quoque major erit ratio cubi R B ad solidum sub rectangulo R B G in F C, quam cubi S ad cubum C F. Et permutando major ratio cubi R B ad cubum S, quam rectanguli R B G in F C ad cubum C F; hoc est, quam rectanguli R B G ad quadratum C F. Est autem quadrato C F æquale rectangulum G C R, hoc est rectangulum sub G C, R B, quia proportionales sunt C R, C F, C G. Itaque major erit ratio cubi R B ad cubum S, quam rectanguli R B G ad rectangulum sub G C, R B, hoc est, quam B G ad G C. Sicut autem B G ad G C, ita R C ad E K. Quia enim est C R ad C G, ut quadratum C R ad quadratum C F seu quadratum C E: ut autem quadratum C R ad quadratum C E, ita est P R ad P E diametrum: Erit idcirco C R ad C G, ut P R ad P E. Unde dupla C R, hoc est, C B ad C G, ut dupla P R ad P E, hoc est, ut P R ad P A. Et dividendo, B G ad G C, ut R A ad A P, seu A E, hoc est, ut R C ad E K, quod dicebamus. Itaque major quoque ratio cubi R B ad cubum S, hoc est, ratio triplicata

R B ad S, quam R C ad E K. Est autem S major ostensa arcu E C. Ergo omnino major erit ratio triplicata R B seu R C ad æqualem arcui E C, quam R C ad E K. Sicut autem R C ad arcum E C, ita est perimeter polygoni B C D L, hoc est, linea Z ad circumferentiam circuli B D; Et sicut R C ad E K, ita perimeter polygoni B C D L ad perimetrum polygoni H K M N, hoc est, ita Z ad T. Ergo major quoque triplicata ratio Z ad circumferentiam totam B D, quam Z ad T. Ratio autem triplicata Z ad X eadem est rationi Z ad T. Itaque major est ratio ipsius Z ad dictam circumferentiam, quam Z ad X. Ac proinde circumferentia minor quam recta X. Quod erat demonstrandum.

Sciendum est autem ipsam X minorem esse duabus tertiis Z & triente T: hoc est, duabus tertiis perimetri polygoni inscripti & triente circumscripti, quibus alioqui minorem esse circuli circumferentiam constat ex præcedentibus. Nam $\frac{2}{3}$ Z cum $\frac{1}{3}$ T æquantur minori duarum mediarum secundum Arithmeticam proportionem, quæ major est minore mediarum secundum proportionem Geometricam.

Jam vero & de polygono Y demonstrabimus, ipsum videlicet circulo B D majus esse. Quia enim polygonum Y habet ad polygonum simile H K M N rationem duplicatam ejus quam perimeter ad perimetrum: perimeter autem polygoni Y æquatur rectæ V, & perim. H K M N ipsi T. habebit proinde polygon. Y ad polyg. H K M N rationem duplicatam ejus quam V ad T, hoc est, eam quam X ad T. Sicut autem polygonum H K M N ad circulum B D, ita est perimeter ipsius polygoni, hoc est, linea T ad circuli B D circumferentiam; quoniam polygonum æquale est triangulo basin habenti perimetro suæ æqualem & altitudinem radii A E, circulus autem æqualis ejusdem altitudinis triangulo cujus basis circumferentiæ æquetur. Ex æquali igitur, erit polygonum Y ad circulum B D sicut X ad circumferentiam B D. Est autem X major ostensa quam B D circumferentia. Ergo & polygonum Y majus erit circulo B D. Quod erat demonstrandum.

Ex his manifestus est Orontii Finei error, qui circumferentiæ quadrantem æqualem minori duarum proportione mediarum inter inscripti & circumscripti quadrati latera prodidit, circulum vero æqualem quadrato quod fieret à majori.

THEOR. XII. PROP. XV.

SI inter productam circuli diametrum & circumferentiam recta aptetur radio æqualis, & producta circulum secet, occurratque tangenti circulum ad alterum diametri terminum: Intercipiet ea partem tangentis arcu adjacente abscisso majorem.

TAB. XXXIX. Fig. 7. Esto descriptus circulus centro C, cujus diameter A B. Hæc autem producatur versus A, interque ipsam & circumferentiam ponatur E D recta radio A C æqualis. Quæ producta secet circumferentiam in F, occurratque tangenti in G, ei nimirum quæ circulum contingit ad diametri terminum B. Dico tangentem B G majorem esse arcu B F. Ducatur enim per centrum recta H L parallela E G, quæ circumferentiæ occurrat in punctis H, M; tangenti vero B G in L. Et jungatur D H, quæ diametrum secet in K. Similes itaque sunt trianguli E D K, C H K, quoniam angulos ad K æquales habent, & angulum E æqualem angulo C. Sed & latus E D æquale est lateri H C, suntque hæc latera æqualibus angulis subtensa. Ergo æquale etiam latus D K lateri K H. Itaque C A secat bifariam ipsam D H, itemque arcum D A H. Arcus igitur D H sive huic æqualis F M duplus est ad arcum A H. Ipsi autem A H æqualis est arcus M B. Igitur arcus F B triplus erit ad arcum A H. Porro quoniam H K sinus est arcus H A, ejusdemque tangenti æquatur L B, erunt duæ tertiæ H K & triens L B simul majores arcu A H *. Quare sumptis omnium triplis erit dupla H K, hoc est, H D sive G L una cum L B major arcu A H triplo, hoc est, arcu F B. Apparet igitur totam G B arcu F B majorem esse.

* per 9. huj.

Hoc

Hoc Theorema alterum est ex iis quibus Cyclometria Willebrordi Snellii tota innititur, quæque demonstrasse ipse videri voluit, argumentatione usus quæ meram quæsiti petitionem continet. Sed & alterum subjungemus, quod utile est imprimis & contemplatione dignissimum.

THEOR. XIII. PROP. XVI.

SI diametro circuli semidiameter in directum adjiciatur, & ab adjectæ termino recta ducatur quæ circulum secet, occurratque tangenti circulum ad terminum diametri oppositum: Intercipiet ea partem tangentis arcu adjacente abscisso minorem.

Esto circulus, cujus diameter A B; quæ producatur, & fit A C semidiametro æqualis. Et ducatur recta C L, quæ circumferentiam secundò secet in E; occurratque tangenti in L, ei nimirum quæ circulum contingit in termino diametri B. Dico interceptam B L arcu B E minorem esse. Junganturenim A E, E B, positâque A H ipsi A E æquali ducatur H E & producatur, occurratque tangenti in K. Denique sit E G diametro A B ad angulos rectos, E D vero tangenti B L. Quoniam igitur isosceles est triangulus H A E, erunt anguli inter se æquales H & H E A. Quia autem angulus A E B rectus est, etiam recto æquales erunt duo simul H E A, K E B. Verùm duo quoque isti H & H K B uni recto æquantur, quoniam in triangulo H K B rectus est angulus B. Ergo demptis utrimque æqualibus, hinc nimirum angulo H, inde angulo H E A, relinquentur inter se æquales anguli K E B, H K B. Triangulus igitur isosceles est K B E, ejusque latera æqualia E B, B K. Est autem B D æqualis E G. Ergo D K differentia est quâ B E excedit E G. Porro quoniam est A G ad A E, ut A E ad A B, erunt duæ simul A G, A B majores duplâ A E *. Ideoque A E, hoc est, A H minor quam dimidia utriusque simul

TAB. XL. Fig. 1.

* 25. 5. Elem.

ſimul A G, A B; hoc eſt, minor quam C A cum dimidia A G. Quare ablatâ utrimque C A, erit C H minor dimidiâ A G. C A vero dimidiâ A G major eſt. Ergo ſi addatur A C ad A G, erit tota C G major quam tripla ipſius C H. Quia autem ut H G ad G E, ita eſt E D ad D K; ut autem G E ad G C, ita L D ad D E: Erit ex æquo in proportione turbata ut H G ad G C, ita L D ad D K. Et per converſionem rationis & dividendo, ut G C ad C H, ita D K ad K L. Ergo etiam D K major quam tripla K L. Erat autem D K exceſſus ipſius E B ſupra E G. Ergo K L minor eſt triente dicti exceſſus. K B autem æqualis eſt ipſi E B ſubtenſæ. Ergo K B unà cum K L, hoc eſt, tota

* per 7. huj. L B omnino minor erit arcu B E*. Quod erat demonſtrandum.

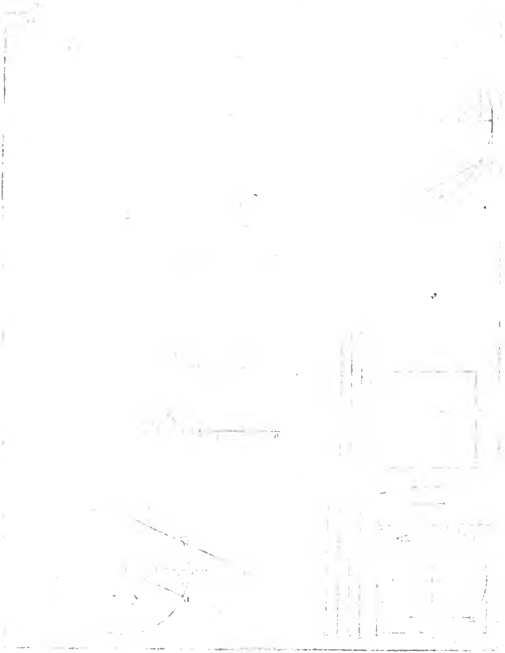
Perpenſo autem Theoremate præcedenti, liquet non poſſe ſumi punctum aliud in producta B A diametro, quod minus à circulo diſtet quam punctum C, eandemque ſervet proprietatem, ut nimirum ductâ C L fiat tangens intercepta B L ſemper minor arcu abſciſſo B E.

Porro uſus hujus Theorematis multiplex eſt, cum in inveniendis triangulorum angulis quorum cognita ſint latera, idque citra tabularum opem, tum ut latera ex angulis datis inveniantur, vel cuilibet peripheriæ arcui ſubtenſa aſſignetur. Quæ omnia à Snellio in Cyclometricis diligenter pertractata ſunt.

Theorema XIV. Propos. XVII.

Portionis circuli centrum gravitatis diametrum portionis ita dividit, ut pars quæ ad verticem reliquâ major ſit, minor autem quam ejuſdem ſeſquialtera.

TAB. XL. Fig. 2. Eſto circuli portio A B C, (ponatur autem ſemicirculo minor, quoniam cæteræ ad propoſitum non faciunt) & diameter portionis ſit B D, quæ bifariam ſecetur in E. Itaque oſten-



ostendendum est primò centrum gravitatis portionis A B distare à vertice B ultra punctum E; nam, quod in diametro situm sit, alibi ostendimus. Ducatur per E recta basi parallela, quæ utrimque circumferentiæ occurrat in punctis F & G. Per quæ ducantur K I, H L basi A C ad angulos rectos, atque hæ cum ea, quæ portionem in vertice contingit, constituant rectangulum K L. Quoniam igitur portio semicirculo minor est, constat rectanguli dicti dimidium F L contineri intra segmentum A F G C, atque insuper spatia quædam A F I, L G C. Alterum vero rectanguli K L semissem K G complecti segmentum F B G unà cum spatiis F B K, B G H. Quæ spatia quum sint tota supra rectam F G, etiam centrum commune gravitatis eorum supra eandem situm erit. Est autem E punctum in ipsa F G centrum grav. totius rectanguli K L. Igitur spatii reliqui B F I L G B centrum grav. erit infra rectam F G. Sed & spatiorum A F I, L G C commune gravitatis centrum est infra eandem F G. Ergo magnitudinis ex spatiis hisce & dicto spatio B F I L G B compositæ, quæ est portio ipsa A B C, centrum gravitatis infra lineam F G reperiri necesse est, ideoque infra E punctum.

Eadem verò diameter B D secetur nunc in S, ita ut B S sit sesquialtera reliquæ S D. Dico centrum grav. portionis A B C minus distare à vertice B quam punctum S. Sit enim B D P totius circuli diameter. & ducatur per S recta basi parallela quæ circumferentiæ occurrat in F & G. Et parabole intelligatur cujus vertex B, axis B D, rectum vero latus æquale S P. Et occurrat basi portionis in H & K. Quoniam igitur quadratum F S æquale est rectangulo B S P, hoc est, ei quod sub B S & latere recto parabolæ continetur, transibit ea per F punctum, itemque per G. Partes autem lineæ parabolicæ B F, B G intra circumferentiam cadent, sed reliquæ F H, G K erunt exteriores. Hoc enim ostenditur ductâ inter B & S ordinatim applicatâ N L, quæ circumferentiæ occurrat in N, parabolæ autem in M. Nam quia quadratum N L æquale est rectangulo B L P, quadratum vero TAB. XL. Fig. 1.

M L rectangulo contento lineis B L, S P: rectangulum autem B L P majus eo quod sub B L, S P continetur: erit quadratum N L majus quadrato M L, & N L linea major quam M L. Idem autem continget ubicunque inter B & S aliqua ordinatim applicabitur. Igitur partem circumferentiæ B F totam extra parabolam ferri necesse est, eâdemque ratione partem B G. Rursus quia rectangulum B D P æquale est quadrato D A; rectangulum verò sub B D, S P contentum quadrato D H; erit H D major quam A D potentiâ, ideoque & longitudine. Idemque eveniet ubicunque inter S, D, ordinatim aliqua applicabitur. Quare partes circumferentiæ F A, itemque G C intra parabolam cadent. Fiunt igitur spatia quædam F N B M, & B Q G, itemque alia H F A, G C K. Quorum hæc cum tota sint infra lineam F G, etiam centrum commune gravitatis eorum infra eandem erit. At parabolicæ portionis H B K centrum grav est in ipsa F G, nimirum S punctum *. Ergo partis reliquæ A F M B Q G C centrum grav. erit supra rectam F G. Sed supra hanc situm quoque apparet centrum grav. spatiorum F M B N, B Q G, quum tota sint supra ipsam F G. Ergo & spatii ex hisce duobus & A F M B Q G C compositi, hoc est, portionis circuli A B C centrum grav. supra lineam F G reperietur: quumque sit in B D diametro, minus aberit à vertice B quam punctum S. Quod erat ostendendum.

* 8. lib. 2. Archim. de Æquipond.

THEOR. XV. PROPOS. XVIII.

Circuli portio semicirculo minor ad inscriptum triangulum maximum majorem rationem habet quam sesquitertiam, minorem vero quam diameter portionis reliquæ tripla sesquitertia ad circuli diametrum cum tripla ea, quæ à centro circuli pertingit ad portionis basin.

Sit

SIt portio semicirculo minor, cui inscriptum triangulum maximum A B C. Diameter autem portionis sit B D; & diameter circuli à quo portio resecta est, B F, centrum E. Ostendendum est primo, portionis A B C ad triangulum inscriptum majorem esse rationem quam sesquitertiam. Esto portionis A B C centrum grav. punctum G, & secetur D F in H, ut sit H D dupla reliquæ H F. TAB. XL. Fig. 4.

Quoniam igitur F B est dupla E B; D B autem minor quam dupla G B. Erit major ratio F B ad B D, quam E B ad B G. Et per conversionem rationis, minor B F ad F D, quam B E ad E G. Et permutando minor B F ad B E, (quæ proportio dupla est) quam F D ad E G. Igitur F D major est quam dupla E G. Ipsius autem F D duas tertias continet H D. Ergo H D major est quam sesquitertia E G. Sicut autem H D ad E G, ita est portio A B C ad inscriptum sibi triangulum: hoc enim antehac demonstravimus in Theorematis de Hyperboles Ellipsis & Circuli quadratura *. Itaque major est ratio portionis ad inscriptum triangulum A B C quam sesquitertia. * Vide supra p. 324.

Quod autem ad triangulum A B C portio minorem habeat rationem quam tripla sesquitertia ipsius D F ad diametrum circuli B F unà cum tripla E D, id nunc ostendemus. Secetur diameter portionis in R, ut B R sit sesquialtera reliquæ R D. Ergo cadit R punctum inter G & D * quoniam positum fuit G centrum gravitatis in portione A B C. Quumque portionis ad inscriptum triangulum eadem sit ratio, quæ H D ad E G, ut modo dictum fuit; minor autem sit ratio H D ad E G, quam H D ad E R: Erit propterea minor quoque portionis ad inscriptum triangulum ratio quam H D ad E R, sive quam H D quinquies sumpta ad quintuplam E R. Atqui H D, (cum sit æqualis duabus tertiis D F) quinquies sumpta æquabitur decem tertiis, hoc est, triplæ sesquitertiæ D F. E R verò quæ continet E D & duas quintas ipsius D B, si quinquies sumatur, æquabitur duplæ B D & quintuplæ E D; hoc est, duplæ totius E B atque insuper triplæ E D. Igitur appa- * per praeced.

 ret

ret portionem A B C ad inscriptum triangulum minorem habere rationem quam triplam sesquitertiam D F ad duplam E B, hoc est, diametrum B F, unà cum tripla E D. Quod erat demonstrandum.

Theor. XVI. Propos. XIX.

Arcus quilibet semicircumferentiâ minor, major est suâ subtensâ simul & triente differentiæ quâ subtensa sinum excedit. Idem verò minor quam subtensa simul cum ea quæ ad dictum trientem sese habeat, ut quadrupla subtensa juncta sinui ad subtensam duplam cum sinu triplo.

Tab. XL. Fig. 5. Esto circulus cujus D centrum, diameter F B. Et sit arcus B A semicircumferentiâ minor, cui subtensa ducatur B A, sinus autem A M: quæ nimirum diametro F B sit ad angulos rectos. Porro ipsi A M sit æqualis recta G H, & G I æqualis subtensæ A B. Excessus igitur est H I; cujus triens I K ipsi G I adjiciatur. Ostendendum est primo, arcum A B totâ G K majorem esse. Hoc autem ex Theoremate 7. est manifestum. At cum ipsi G I additur IO quæ ad I K trientem ipsius H I rationem habeat, quam quadrupla G I una cum G H ad duplam G I cum tripla G H. Dico totam G O arcu A B majorem esse. Constituantur enim super lineis G H, H I, IO, triangula quorum communis vertex sit L, altitudo autem æqualis radio D B. Et jungatur D A, ducaturque diameter circuli C E quæ rectam A B bifariam dividat in N, arcum vero A B in E. Et jungantur A E, E B.

Quoniam igitur O I est ad I K ut quadrupla G I unà cum G H ad duplam G I cum tripla G H; sumptis consequentium triplis erit O I ad I H (hæc enim tripla est I K,) ut quadrupla G I unà cum G H ad sexcuplam G I cum noncupla G H. Et componendo, O H ad H I, ut decupla utriusf-

utriusque I G, G H ad sexcuplam I G cum noncupla G H: vel sumptis horum trientibus ut decem tertiæ duarum simul G I, G H ad duplam G I cum tripla G H. Est autem eadem ratio linearum G I ad G H, hoc est, B A ad A M, quæ B D ad D N, propter similes triangulos B A M, B D N. Ergo etiam O H ad H I, ut $\frac{10}{3}$ utriusque simul B D, D N ad duplam B D cum tripla D N; hoc est, ut $\frac{10}{3}$ N C ad diametrum E C cum tripla D N. Hac autem ratione minor est ratio portionis A E B ad A E B triangulum *. Ergo dictæ portionis ad dictum triang. minor quoque ratio quam O H ad H I, hoc est, quam trianguli O H L ad triangulum I H L. Triangulum autem I H L æquale est triangulo A E B. Quod sic ostenditur. Triangulum enim G H L æquale est triangulo D A B, quoniam bases & altitudines reciprocè æquales habent. Similique ratione quoniam G I æqualis est rectæ A B, erit triangulum G I L æquale duobus simul triangulis D A E, D B E, hoc est, quadrilatero D A E B. Itaque triangulum H I L triangulo A E B æquari necesse est, quod dicebamus. Habebit itaque portio A E B ad triangulum sibi inscriptum A E B minorem quoque rationem quam triangulum O H L ad idem triangulum A E B. Quamobrem triangulum O H L portione A E B majus erit. Et totum proinde triangulum O G L majus sectore D A E B. Altitudo autem trianguli G L O æqualis est radio D B. Ergo basis G O major erit arcu A B. Quod erat ostendendum.

* *per praeced.*

Ex his autem manifestum est de tota quoque circumferentia pronunciari posse, quod, *Si circulo inscribantur polygona duo æquilatera, quorum alterum alterius sit duplo laterum numero, & differentiæ perimetrorum triens perimetro polygoni majoris adjungatur, composita ex his circuli circumferentiâ minor erit. Eidem vero majori perimetro si linea addatur quæ ad dictum differentiæ trientem sese habeat, sicut quadrupla perimetri majoris juncta perimetro minori, ad duplam majoris cum tripla minoris, composita circumferentiam circuli excedet.*

 PRO-

Problema IV. Propos. XX.

Circumferentiæ ad diametrum rationem investigare; & ex datis inscriptis in dato circulo invenire longitudinem arcuum quibus illæ subtenduntur.

Tab. XL. Fig. 6. Esto circulus centro D, cujus diameter C B, & sit arcus B A sextans circumferentiæ, cui subtensa ducatur A B, itemque sinus A M. Positâ igitur D B semidiametro partium 100000, totidem quoque erit subtensa B A. A M verò partium 86603 non unâ minus, hoc est, si una pars sive unitas auferatur ab 86603 fiet minor debito. quippe semissis lateris trianguli æquilateri circulo inscripti.

Hinc excessus A B supra A M fit 13397 vero minor. Cujus triens $4465\frac{2}{3}$ additus ipsi A B 100000, fiunt partes $104465\frac{2}{3}$ minores arcu A B. Et hic primus est minor terminus, quo postea alium vero propiorem inveniemus. Prius autem major quoque terminus secundum Theorema præcedens inquirendus est.

Tres nimirum sunt numeri quibus quartum proportionalem invenire oportet. Primus est partium duplæ A B & triplæ A M qui erit 459807, vero minor, (nam hoc quoque observandum ut minor sit, idemque in cæteris prout dicetur) secundus quadruplæ A B & simplæ A M qui 486603 vero maj. Et tertius triens excessus A B supra A M, 4466 vero major. Itaque quartus proportionalis erit 4727 vero maj. quo addito ad A B 100000 fit 104727, major numero partium, quas continet arcus A B, peripheriæ sextans. * per præced. * Jam igitur invenimus longitudinem arcus A B secundum minorem majoremque terminum, quorum hic quidem longe propior vero est, cum vero proximus sit 104719.

Sed ex utroque istorum alius minor terminus habebitur priore accuratior si utamur præcepto sequenti, quod à diligentiori centrorum gravitatis inspectione dependet.

In-

Inventorum terminorum differentia sesquitertia jungatur duplæ subtensæ & sinui triplo, & quam rationem habet ex his composita ad triplam sesquitertiam seu $\frac{10}{3}$ utriusque simul, sinus, subtensæque, eandem habeat subtensæ supra sinum excessus ad aliam quandam; Hæc ad sinum addita rectam constituet arcu minorem.

Minor terminus erat $104465\frac{2}{3}$. Major 104727. differentia horum est $261\frac{1}{3}$. Estque rursus tribus numeris inveniendus quartus proportionalis. Primus est partium duplæ A B & triplæ A M & sesquitertiæ terminorum differentiæ, 460158 vero major. Secundus $\frac{10}{3}$ utriusque simúl A B, A M, 622008 vero minor. Tertius denique excessus A B supra A M, 13397 vero min. Quibus quartus proportionalis est 18109 vero min. Hic igitur additus numero partium A M $86602\frac{1}{2}$ vero min. fiunt $104711\frac{1}{2}$ minores arcu A B. Quare sexcuplum earum, 628269 minus erit circumferentiâ totâ. At quoniam 104727 majores inventæ sunt arcu A B, earum sexcuplum 628362 circumferentiâ majus erit. Itaque circumferentiæ ad diametrum ratio minor est quam 628362, major autem quam 628269 ad 200000. Sive minor quam 314181, major autem quam 314135 ad 100000. Unde constat minorem utique esse quam triplam sesquiseptimam, & majorem quam $3\frac{10}{71}$. Quin etiam Longomontani error per hæc refutatur, qui scripsit peripheriam majorem esse partibus 314185 qualium rad. 100000.

Esto nunc arcus A B $\frac{1}{8}$ circumferentiæ, & erit A M, semissis lateris quadrati circulo inscripti, partium 7071068, non unâ minus, qualium radius D B 10000000. A B vero latus octanguli partium 7653668 non unâ majus. Quibus datis ad similitudinem præcedentium invenietur primus minor terminus longitudinis arcus A B 7847868. Deinde major terminus 7854066. Et ex utroque rursus terminus minor accuratior 7853885. Unde constat peripheriæ ad diametrum rationem minorem haberi quam $31416\frac{1}{3}$, majorem autem quam 31415 ad 10000.

Et quum terminus major 7854066 à vera arcus A B longitu-

gitudine minus distet quam partibus 85; (Est enim arcus A B, per ea quæ supra ostendimus, major quam 7853981) partes autem 85 efficiant minus quam duos scrupulos secundos, hoc est, quam $\frac{2}{1296000}$ circumferentiæ, nam tota earundem plures habet quam 60000000: Hinc manifestum est, si trianguli rectanguli angulos quæramus ex datis lateribus, eo modo quo majorem istum terminum paulò antè, nunquam duobus scrupulis secundis aberraturos; etiamsi æqualia inter se fuerint latera circa angulum rectum, veluti hic erant in triangulo D A M.

Si vero ea sit ratio lateris D M ad M A, ut angulus A D M non excedat $\frac{1}{4}$ recti; non unius tertii scrupuli error erit. Posito enim arcu A B $\frac{1}{16}$ circumferentiæ, erit A M semissis lateris octanguli æquilateri circulo inscripti partium 382683433, non unâ minus. A B vero latus sexdecanguli 390180644 non unâ amplius, qualium radius D B 1000000000. Unde primus minor terminus longitudinis arcus A B invenitur partium 392679714. Terminus autem major 392699148. Et ex his minor rursus 392699010. Constat autem ex supra demonstratis arcum A B $\frac{1}{16}$ peripheriæ, majorem esse quam 392699081, quas terminus major superat partibus 67. Hæ autem minus efficiunt uno scrupulo tertio, hoc est, $\frac{1}{77760000}$ totius circumferentiæ, quoniam ea major est utique quam 6000000000.

Porro ex novissimis terminis inventis orietur ratio circumferentiæ ad diametrum minor quam 3141593$\frac{1}{3}$, major autem quam 3141592 ad 1000000.

Quod si $\frac{1}{60}$ circumferentiæ ponatur arcus A B, seu partium 6 qualium tota 360: Erit A M semissis lateris trigintanguli inscripti partium 104528463267766, non unâ minus, qualium radius 1000000000000000. Et A B latus sexagintanguli inscripti 104671912485588 non unâ amplius. Invenieturque ex his arcus A B secundum primum minorem terminum 104719728889195. Secundum majorem 104719755125584. Et ex his minor alter terminus 104719755111302. Unde efficitur peripheriæ ad diametrum ratio minor quam 31415926538,

31415926538, major autem quam 31415926533 ad 10000000000.

Quos terminos si ex additis inscriptorum & circumscriptorum polygonorum lateribus inquirendum esset ferè ad laterum quadringenta millia deveniendum. Nam ex sexagintangulo inscripto circumscriptoque hoc tantum probatur, minorem esse rationem peripheriæ ad diametrum quam 3145 ad 1000, majorem autem quam 3140. Adeo ut triplum & amplius verarum notarum numerum nostro ratiocinio productum appareat. Idem vero in ulterioribus polygonis si quis experiatur semper evenire cernet: non ignota nobis ratione, sed quæ longiori explicatione indigeret.

Porro autem quomodo, datis quibuscunque aliis inscriptis, arcuum quibus subtenduntur longitudo per hæc inveniri queat satis puto manifestum. Si enim quadrati inscripti latere majores sunt, longitudo arcus ad semicircumferentiam reliqui inquirenda est, cujus tum quoque subtensa datur. Sciendum autem & dimidiorum arcuum subtensas inveniri cum totius arcus subtensa data est. Atque hàc ratione si bisectionibus uti placebit, poterimus ad omnem subtensam, arcus ipsius longitudinem quamlibet veræ propinquam non difficulter cognoscere. Utile hoc ad sinuum tabulas examinandas. Imo ad componendas quoque: quia cognitâ arcus alicujus subtensâ, etiam ejus qui paulò major minorve sit satis accuratè definiri potest.

CHRISTIANI HUGENII C. F.

ILLVSTRIVM QVORVNDAM

PROBLEMATVM CONSTRVCTIONES.

PROBL. I.

Datam sphæram plano secare, ut portiones inter se rationem habeant datam.

HOc Archimedes problema resolvit lib. 2. de Sphæra & Cylind. Compositionem autem promissam non videtur explicuisse, nisi ipsius est illa quam Eutocius in vetusto quodam libro repertam commentariis suis inseruit. Ea vero paraboles & hyperboles intersectione perficitur, uti & illa cujus Dionysidorus autor est, quæ tamen à priori differt. Præter has tertiam quoque adfert Eutocius è Dioclis de Pyriis libro, quæ hyperboles & ellipsis descriptionem requirit. Nostra autem quam hic conscribemus anguli trisectionem postulat; Et hæc construendi ratio in solidis problematibus quodammodo simplicissima videtur, atque ad usum maxime accommodata.

TAB. XLI. Fig. 1. Esto igitur data sphæra cujus centrum M, diameter C A. Et data sit proportio lineæ S ad T majoris ad minorem. Intelligatur secari sphæra plano secundum A C diametrum, sitque maximus in ea circulus C B A D. Et producatur utrimque diameter C A, & ponatur semidiametro æqualis utraque harum C H, A E. Et dividatur tota H E in Q, ut sit E Q ad Q H sicut S ad T. Ipsi autem M Q æqualis ponatur ad circumferentiam recta A R. Et ei quæ tertiam partem subtendit arcus A R, æqualis sumatur M N.

Et

Et per N punctum ducatur planum K L quod diametro C A sit ad angulos rectos. Dico hoc sphæram sic secare, ut portio cujus A vertex est ad eam cujus vertex C rationem habeat quam S ad T.

Secetur enim sphæra per centrum M plano B D ipsi K L parallelo, & jungantur K M, M L; & intelligatur conus basin habens circulum factum sectione K L, verticem vero M. Et sicut quadratum C M ad quadratum M N, ita sit M N ad N O longitudine. Erit igitur per conversionem rationis ut quadratum C M sive quadr. K M ad quadratum K N (est enim quadr. K N excessus quadrati K M supra quadr. M N) ita linea N M ad M O. Sicut autem quadr. K M, hoc est, quadr. B M ad quadr. K N, ita est circulus circa diametrum B D ad eum qui circa diametrum K L. Ergo quoque ille circulus ad hunc sese habebit ut N M ad M O. Ac proinde conus K M L æqualis erit cono cujus basis circulus circa diametrum B D, altitudo M O *. Hic autem conus ad hemisphæram B C D, hoc est, ad conum qui basin habeat eundem circulum circa B D diametrum, & altitudinem M H *, eam habet rationem quam M O ad M H. Itaque & conus K M L erit ad hemisphæram B C D sicut M O ad M H. Et invertendo.

* 15. 12. Elem.

* 32. 1. Archim. de Sphær. & Cylin.

Porro autem quoniam hemisphæra B C D est ad sectorem solidum M K C L sicut superficies illius sphærica ad sphæricam hujus superficiem *, hoc est, ut M C ad C N †. Erit per conversionem rationis hemisphæra B C D ad partem sui quæ remanet dempto sectore M K C L, sicut C M ad M N: vel sumptis horum duplis ut H M ad O Q. Quod enim O Q dupla sit ipsius M N postea ostendemus. Fuit autem ostensum, quod hemisphæra B C D ad conum K M L sicut H M ad M O. Ergo jam hemisphæra B C D ad totam portionem inter plana B D, K L contentam erit ut H M ad utramque simul Q O, O M *, hoc est, ad M Q. Quare & per conversionem rationis, erit hemisphæra B C D ad portionem K C L, ut M H ad H Q. Et sumptis antecedentium duplis, sphæra tota ad portionem K C L ut E H

* 42. 1. Archim. de Sphær. & Cyl.

† 3. 2. Archim. de Sphær. & Cyl.

* 24. 5 Elem.

 ad

ad H Q. Et dividendo, portio K A L ad portionem K C L ut E Q ad Q H, hoc est ut S ad T. Quod erat faciendum. Quod autem dictum fuit O Q duplam esse ipsius M N, sic fiet manifestum. Quia enim ut quadratum C M ad quadr. M N, ita est M N ad N O longitudine: Est autem Q M æqualis subtensæ arcus A R cujus trienti subtenditur M N. Erunt propterea duæ simul Q M & N O æquales triplæ M N, uti sequenti lemmate demonstratur. Quamobrem ablata communi O N, erit sola Q M æqualis duplæ N M & ipsi M O. Sed eadem Q M æqualis est duabus simul his Q O, O M, ergo apparet duplam M N æquari ipsi O Q.

LEMMA.

TAB. XLI. Fig. 2. SI Circumferentiæ arcus in tria æqualia secetur, tres simul rectæ quæ æqualibus partibus subtenduntur, æquantur subtensæ arcus totius & ei quæ ad subtensam trientis sese habeat, sicut hujus quadratum ad quadratum semidiametri. Arcus sectoris A B C in tria æqualia divisus sit punctis D, E. Et subtendantur partibus rectæ B D, D E, E C; & toti arcui linea B C. Porro jungantur D A, E A, atque intersecent subtensam B C in punctis G & H. Sitque H F parallela G D.

Quoniam igitur circumferentia B D E dupla est circumferentiæ E C, angulus autem huic insistens E A C ad centrum constitutus, qui vero illi insistit angulus B C E ad circumferentiam. Erit propterea angulus B C E, hoc est, angulus H C E in triangulo H C E æqualis angulo C A E in triangulo C A E. Sed angulus ad E utrique est communis; itaque similes inter se sunt dicti trianguli: Eritque ut A E ad E C ita E C ad E H. Ratio igitur A E ad E H hoc est D E ad E F, duplicata est rationis A E ad E C, ac proinde eadem quæ quadrati A E ad quadr. E C seu quadr. E D. Erit igitur invertendo F E ad E D sicut quadr. E D ad quadr. E A. Quamobrem ostendendum est, tres simul B D, D E, E C æquari subtensæ B C atque

atque ipsi E F. quod sane manifestum est; nam C E est æqualis C H; B D æqualis B G; D E vero utrisque simul G H, & F E. Ergo constat propositum.

Sumpsimus autem arcum B C semicircumferentiâ minorem quoniam in constructione problematis ejusmodi semper invenitur. Nam lemma ad quosvis arcus pertinet, estque in semicircumferentiâ majoribus demonstratio parum diversa.

PROBL. II.

Cubum invenire dati cubi duplum.

AD hoc imperfectam primò constructionem proponemus ad mechanicen utilem; deinde accuratam subjiciemus, quæ tamen non nisi sæpius tentando perficiatur. Etenim solida problemata omnia vel hoc exigunt vel sectionum conicarum descriptionem.

Sit itaque datus cubus cujus latus A B, oporteatque invenire latus cubi dupli. TAB. XLI. Fig. 1.

Radio B A semicirculus describatur A F C. Sitque arcus A F semicircumferentiæ triens, C D vero quadrans; & ducantur C F, A D, quarum intersectio ad E punctum. Erit A E latus cubi quæsiti; exiguo tamen excedens, quodque minus sit $\frac{1}{2000}$ sui parte, ut facile numeris explorari potest. Fit enim A E secans anguli p. 37. scr. 30. quæ proinde major est partibus 12600 qualium A F vel A B 10000. Minor autem quam 12605. Itaque cum cubus ex 12600 sit major quam duplus ejus qui ex A B 10000, erit & cubus A E major duplo cubo ex A B. Rursus quia A E major est partibus 12600 erit $\frac{1}{2000}$ A E major part. 6. Tota vero A E minor est quam 12605. Ergo auferendo ab A E partem bismillesimam sui ipsius reliqua minor erit partibus 12599, tot enim supersunt cum ex 12605 deducuntur 6. Atqui cubus ex 12599 minor est duplo cubo ex 10000. Ergo omnino quoque A E diminuta parte sui bismillesima cubum minorem producet quam sit duplus cubus à latere A B.

Porro ad perfectam constructionem, C F quidem uti pri-

 us

us ducenda est: A D vero sic, ut subtensa C D æqualis sit abscissæ E F. Etenim his positis dico cubum A E ejus qui ex A B duplum existere.

Producatur enim C A, & sit ipsi A E æqualis A G. Propter triangulos similes igitur est E C ad C D, hoc est, E F ut E A ad A F, hoc est, ut G A ad A B. Et componendo C F ad F E ut G B ad B A sive A F. Et permutando C F ad G B ut E F ad F A. Quare ut C F quadratum ad quadr. G B, ita quadr. E F ad quadr. F A. Et componendo ut quadr. C F & G B ad quadr. G B, ita quadr. E F & F A simul, hoc est, quadr. E A ad quadr. A F. Quadr. autem C F & G B simul æquantur rectangulo G C A cum quadr. A G, quod sic ostenditur. Quadratum enim G B æquale est rectangulo C G A & quadrato A B seu A F *. Quare addito utrimque quadrato F C, erunt quadrata G B, F C simul æqualia rectangulo C G A & quadrato A C. Rectangulum autem C G A cum quadrato A C æquatur rectangulo G C A cum quadrato G A. Itaque & quadrata C F, G B simul æqualia sunt rectangulo G C A cum quadrato A G, sicut diximus. Sicut igitur rectangulum G C A cum quadrato A G ad quadr. G B, ita est quadr. E A ad quadr. A F, hoc est, ita quadratum G A ad quadr. A B. Et permutando, ut rectangulum G C A cum quadrato G A ad quadratum G A ita quadr. G B ad quadr. A B. Dividendo igitur, erit ut rectang. G C A ad quadr. G A, ita quadr. G B dempto quadrato A B, hoc est, rectangulum C G A ad quadr. A B. Et permutando rursus, ut rectang. G C A ad rectang. C G A, hoc est, ut C A ad A G ita quadratum G A ad quadr. A B. Quamobrem quod fit ex quadrato G A in ipsam G A, hoc est, cubus G A æquabitur ei quod fit ex quadrato A B in A C, hoc est, duplo cubo ex A B. Quod erat demonstrandum.

* 6.2. Elem.

PROBL.

PROBL. III.

Datis duabus rectis duas medias proportionales invenire.

VEterum Geometrarum ad hoc Problema constructiones complures retulit Eutocius ad lib. 2. Archimedis de Sphæra & Cylindro, at non omnes inventione diversas, uti recte quoque ipse animadvertit. Heronis enim inventionem secuti videntur Apollonius & Philo Byzantius: quanquam Heronem Apollonio ætate posteriorem nonnulli existiment. Dioclis modum Pappus & Sporus. Nicomedea autem constructio præ cæteris subtilis ibidem extat, quam Fr. Viëta paulò aliter concinnatam suo Geometriæ supplemento inseruit. R. Cartesii egregia est & nova per paraboles & circumferentiæ intersectionem, cujus demonstratio legitur in libris Harmonicôn M. Mersenni. Nostræ autem sequentes.

Sit datarum linearum major A C, quæ bifariam secetur in E. Minor autem sit A B, quæ sic constituatur ut triangulus E A B habeat crura æqualia A E, E B. Et perficiatur parallelogrammum C A B D. Et producantur A C, A B. Porro applicetur regula ad punctum D, & moveatur quousque positionem habeat G F, abscindens nimirum E F æqualem rectæ E G; (Hoc autem vel sæpius tentando assequemur, vel descriptâ hyperbole, uti postea ostendetur) Dico inter A C, A B medias duas inventas esse B G, C F. TAB. XLI. Fig. 4.

Sit enim E K ipsi A B ad angulos rectos. Quia igitur B E æqualis E A, dividetur A B in K bifariam: adjecta autem est linea B G. Ergo rectangulum A G B cum quadrato ex K B, æquabitur quadrato K G. Et addito utrimque quadrato K E, erit rectangulum A G B unà cum quadratis B K, K E, hoc est unà cum quadrato B E, æquale quadrato E G. Similiter quia A C bifariam dividitur in E, & adjecta

jecta est linea C F, erit rectangulum A F C cum quadrato E C æquale quadrato E F. Quadratum autem E F æquale est quadrato E G. Erit igitur rectangulum A F C cum quadrato C E, æquale rectangulo A G B cum quadrato B E. Atqui quadratum C E seu E A æquale est quadrato E B. Ergo & reliquum rectangulum A F C æquale rectangulo A G B. Quare sicut F A ad A G ita B G ad C F. Ut autem F A ad A G ita est D B ad B G, & ita quoque F C ad C D. Igitur ut D B, hoc est, A C ad B G ita B G ad F C, & F C ad C D, hoc est, A B. Quod erat dem. Quod autem dictum est, etiam descriptâ hyperbole inveniri quomodo linea F D G ducenda sit, hinc constabit: Factum enim sit, ut E F, E G sint æquales, & sumatur G N æqualis D F. Itaque punctum N est ad hyperbolem quæ describetur per D punctum circa asymptotos F A, A G *. Sed idem punctum N est quoque ad circuli circumferentiam cujus centrum E radius E D: (Hoc enim facile intelligitur quia triangulus F E G est æquicruris, & N G æqualis D F) Itaque datum est punctum N ad interfectionem hyperboles & circumferentiæ dictæ. Sed & D datum est. Datur igitur positione linea F G ducenda per puncta N, D. Et compositio manifesta est.

* 8. 2. Conic.

A L I T E R.

TAB. XLI. Fig. 5.

Circa diametrum A C majori datarum linearum æqualem circulus describatur & ponatur A B minori datarum æqualis, & perficiatur parallelogrammum A D: productâque A B, ducatur ex centro E recta E H G eâ ratione ut H D, H G sint inter se æquales. Secet autem circumferentiam in L. Dico duabus A C, A B duas medias inventas esse B G, G L.

Producatur enim G E usque ad circumferentiam in K, & jungatur A K, eique parrallela ducatur B O. Similes itaque sunt trianguli A E K, B H O; & quia A E æqualis E K, etiam B H, H O æquales erunt. Sed & H G, H D inter se æquales sunt. Igitur tota O G æqualis B D, hoc

est,

est, diametro A C vel L K; & ablatâ communi L O, relinquentur æquales L G, O K. Est autem rectangulum K G L æquale rectangulo A G B. Ergo ut K G ad G A ita B G ad G L. Sed ut K G ad G A ita est O G ad G B & ita reliqua O K, hoc est, L G ad B A. Ergo ut O G, hoc est, A C ad G B ita B G ad G L & G L ad A B. Quod erat demonstr. Hujus autem constructionis inventio eandem cum præcedenti originem habet.

A L I T E R.

Sint datæ A B & Q quibus duas medias proportionales invenire opus sit; A B autem quam Q major. TAB. XLI. Fig. 6.

Dimidiæ Q sumatur æqualis A F, & productâ A B utrimque, sit ipsi æqualis B R. Erigatur autem ad A B perpendicularis F C, & ipsi R A æqualis ponatur R C: & jungatur B C, & huic parallela ducatur A E. Denique applicatâ regulâ ad punctum C, moveatur ea quousque positionem habeat C D, faciens C E æqualem A D. Dico inter A B & Q duas medias esse C E, E D.

Jungatur enim C A. Igitur quia æquales sunt R A, R C & angulus C F A rectus, erit R A ad A C ut A C ad duplam A F, hoc est, Q: ac proinde quadratum A C æquale rectangulo sub R A & Q. Quadratum autem A C cum quadrato A D & duplo rectangulo D A F, hoc est, sub D A & Q contento, æquatur quadrato D C*. Igitur quadratum D C æquabitur quadrato D A unà cum rectangulis sub D A, Q, & sub R A, Q, hoc est, unà cum rectangulo sub D R & Q. Quadratum autem D B æquale rectangulo R D A & quadrato A B*. Igitur ut quadratum D B ad quadratum D C, hoc est, ut quadr. A B ad quadr. A D, (est enim ut D B ad D C sic A B ad E C sive A D) ita erit rectangulum R D A cum quadrato A B ad rectangulum sub R D, Q, cum quadrato A D. Quamobrem & rectangulum R D A ad rectangulum sub R D, Q, sicut quadr. A B ad quadr. A D*. Est autem ut quadratum A B ad quadr. A D, ita A B ad E D longitudine: nam ut B A ad A D

* 12. 2. Elem.

* 6. 2. Elem.

* 19. 5. Elem.

sic

sic C E, hoc est, ipsa A D ad E D. Ergo rectangulum R D A ad rectangulum sub R D, Q, hoc est, A D ad Q sicut A B ad E D. Et permutando & invertendo, B A ad A D ut E D ad Q. Atqui ut B A ad A D, hoc est, C E ita C E ad E D. Ergo ut A B ad C E ita C E ad E D, & E D ad Q. Itaque inter A B & Q mediæ proportionales sunt C E, E D. Quod erat ostendendum.

PROBL. IV.

Quadrato dato & uno latere producto, aptare sub angulo exteriori rectam magnitudine datam quæ ad angulum oppositum pertineat.

TAB. XLI. Fig. 7. Esto quadratum B A cujus productum sit latus F A. Data verò linea K. Et oporteat ducere rectam B D C, ita ut pars intercepta D C sit datæ K æqualis.

Quadratis ex K & E B sit æquale quadratum E G; & super B G diametro describatur semicirculus B C G secans rectam F A productam in C, & ducatur B D C. Dico D C æqualem esse ipsi K. Jungantur enim C G, G D; sitque C H ipsi B G ad angulos rectos.

Quia igitur similes sunt trianguli B E D, C H G, & latera B E, C H circa angulos rectos inter se æqualia, erit & latus D B æquale lateri G C, & D E ipsi G H. Sunt autem quadrata D C, C G, hoc est, quadrata D C, C H, * 47.1. Elem. & H G æqualia quadrato D G *, hoc est, quadratis G E, E D. Ergo dempto hinc quadrato E D, inde vero quadrato H G; erunt duo quadrata D C & C H æqualia quadrato * Ex constructione. E G, hoc est, quadratis ex K & E B *. Quadratum autem E B æquale est quadrato C H. Ergo & reliquum quadratum D C æquabitur K quadrato; & recta D C ipsi K. Quod erat ostendendum.

Demonstratio hæc ab ea diversa est quæ apud Pappum Alex. legitur lib 7. prop. 72. Constructio verò non differt. Cæterum eandem ad casum quoque sequentem pertinere invenimus.

PROBL.

PROBL. V.

DAto quadrato, & duobus contiguis lateribus productis, aptare sub angulo interiori rectam magnitudine datam quæ per angulum oppositum transeat. Oportet autem non minorem esse datam quam sit quadrati diameter dupla.

Datum sit quadratum A B, productaque latera A F, A E. TAB. XLI. Fig. 1. Data verò linea K, non minor duplâ A B diametro. Et oporteat per angulum B ponere rectam D C ipsi K æqualem.

Si K æqualis fuerit duplæ A B, constructio manifesta est; tunc enim per B ducenda est quæ sit ipsi A B ad angulos rectos, eaque propositum efficiet. Cum verò major erit K quam dupla A B, constructio iisdem verbis præcipitur atque in Problemate præcedenti: & demonstratio quoque est eadem.

Quod autem circumferentia B C G secabit productam A F hinc manifestum est. Etenim quia K major est duplâ diametro A B, erit K quadratum majus octo quadratis E B. Itaque quadratum E G majus quam quadrata novem ex E B; ac proinde E G major quam tripla E B. Dimidia igitur B G, hoc est, radius descripti semicirculi major quam E B vel B F; unde necesse est rectam A C secari à circumferentia B C G.

PROBL. VI.

RHombo dato, & uno latere producto, aptare sub angulo exteriori lineam magnitudine datam quæ ad oppositum angulum pertineat.

Sit datus rhombus A B, cujus productum latus F A. Data TAB. XLII. Fig. 1. autem linea K. Et oporteat ducere rectam B D C, ita ut pars intercepta D C sit ipsi K æqualis.

Ducatur diameter A B, & latus B E producatur; & quadratis ex K & A B sit æquale quadratum A G. Et super B G

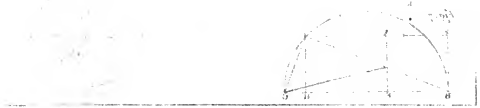
 cir-

circumferentiæ portio describatur quæ capiat angulum ipsi B F A æqualem. Secabit ea productum latus F A, ut modo ostendetur. Itaque ad intersectionis punctum C ducatur B C. Dico hujus partem interceptam D C lineæ datæ K æqualem esse. Quod autem circumferentia descripta latus F A productum secabit, sic primùm ostenditur. Ducatur A N ita ut sit angulus B A N angulo B F A vel B E A æqualis. Itaque triangulus B A N triangulo B E A similis est, ac proinde isosceles quoque. Quare si super B N circumferentia describatur quæ capiat angulum B F A, ea continget latus F A in A puncto. Sed B G major est quam B N: nam quadratum A G majus est quadrato A N vel A B, cum sit æquale quadratis ex K & A B. Quare A G cadet extra triangulum isoscelem B A N. Itaque manifestum est circumferentiam super B G descriptam capientemque angulum ipsi B F A vel B A N æqualem secare lineam F A C. Esto alterum intersectionis punctum M & jungantur B M, G C, & cadat in B E ex A perpendicularis A L.

Quia igitur quadratum A G æquale est quadratis ex K & A B: atque idem quadratum A G æquale quadratis A B & B G minus duplo rectangulo G B L, hoc est, minus rectangulo G B N; erit K quadratum æquale quadrato B G minùs rectangulo G B N, hoc est, rectangulo B G N. Est autem ut rectangulum B G N ad rectang. B E, G N, ita B G ad B E. Ergo ut B G ad B E ita quoque quadratum K ad rectangulum G N, B E, hoc est, rectangulum G B E minùs rectangulo N B E. Est autem rectangulo G B E æquale rectang. C B D, quoniam G B ad B C ut D B ad B E propter triangulos similes G B C, D B E; habent enim angulum ad B communem, & angulus B C G ipsi B E D est æqualis. Item rectangulo N B E æquale est quadratum A B quia propter triangulos similes est N B ad B A ut A B ad B E. Ergo erit G B ad B E ut quadratum K ad rectangulum C B D minùs quadrato A B. Est autem rectangulo C B D minùs quadr. A B æquale rectangulum D A, A C, quod sic ostenditur. Etenim quia quadrilaterum C G B M

est





est in circulo, sunt anguli C G B & B M C simul duobus rectis æquales. Sed & anguli E D B, A D B. Quorum E D B æqualis angulo C G B propter similitudinem triangulorum G B C, D B E. Ergo & angulus B M C æqualis erit angulo A D B. Trianguli igitur A B M, A B D angulos M & D inter se æquales habent. Verum & angulos ad A, & latus A B commune. Itaque dicti trianguli similes sunt & æquales. Quare A M æqualis A D, & M B æqualis B D, & angulus M B A æqualis A B D. In triangulo igitur M B C angulus B in duo æqualia dividitur à recta B A, ideoque rectang. M B C minus quadrato B A æquatur rectangulo M A C. Sed rectangulo C B M æquale est rectangulum C B D; & rectangulo M A C æquale rectang. D A C. Igitur rectang. C B D minus quadrato B A æquale rectangulo C A D, uti dictum fuit. Est itaque G B ad B E ut quadr. K ad rectangulum D A C. Sicut autem G B ad B E ita est rectang. G B E, hoc est, rectang. C B D ad quadratum B E. Ergo ut quadratum K ad rectang. D A C ita rectang. C B D ad quadratum B E. Ratio autem rectanguli C B D ad quadr. B E composita est ex ratione D B ad B E, hoc est, D C ad C A, & ex ratione C B ad B E sive B F, hoc est, C D ad D A. Ergo & quadr. K ad rectang. D A C eam habet rationem quæ componitur ex ratione D C ad C A & D C ad D A, hoc est, eam quam quadratum D C ad rectang. D A C. Quamobrem quadr. K. quadrato D C æquale est: Et D C ipsi K longitudine. Quod erat demonstrandum.

PROBL. VII.

Rhombo dato & duobus contiguis lateribus productis, aptare sub angulo interiori rectam magnitudine datam quæ per oppositum angulum transeat. Oportet autem datam non minorem esse quam duplam diametri quæ reliquos duos rhombi angulos conjungit.

 Sit

TAB. XIII. Fig. 2. Sit datus rhombus A B cujus producantur latera A F, A E, data autem sit recta K cui æqualem ponere oporteat C D, per angulum B transeuntem. Ducatur diameter A B, eique ad angulos rectos linea S B R, quæ quidem æqualis erit duplæ diametro F E. Igitur K non minor debet esse quam S R. Si vero æqualis, factum est quod proponebatur. Sed ponatur K major data esse quam S R. Erit jam in schemate hoc prout propositum est constructio eadem, quæ in Problemate præcedenti. Demonstratio autem nonnihil diversa. Etenim hoc primò aliter ostenditur quod circumferentia super B G descripta secat productam A F. Sit A L ad E B perpendicularis & ducatur S T ut sit angulus B S T æqualis angulo E A F vel B F S. Est itaque triangulus B S T triangulo B F S similis; (nam & angulos ad B æquales habent:) ac proinde æquicruris etiam triangulus B S T. Apparet igitur lineam A S æquari ipsi L B cum dimidia B T. Quare dupla A S æquabitur duplæ L B & toti B T. Sed dupla A S est quadrupla A F vel E B. Ergo quadrupla E B æqualis duplæ L B & B T. Sumptâque communi altitudine B T, erit rectangulum sub quadrupla E B & B T contentum, æquale duplo rectangulo L B T & quadrato B T. Et addito utrimque quadrato B L, erit rectangulum E B T quater cum quadrato L B æquale rectangulo L B T bis cum quadratis B T, B L, hoc est quadrato L T. Quia vero propter triangulos similes est T B ad B S ut B S ad B F sive B E, æquale erit rectang. E B T quadrato B S; & quater sumptum quadrato R S. Itaque quadr. S R cum quadrato L B æquale quadrato L T. Quadratum vero K (quod majus est quam R S quadr.) unà cum eodem quadrato L B æquale est quadrato L G, uti ex constructione manifestum est, quia scilicet quadr. A G æquale positum fuit quadratis ex K & A B. Itaque majus est quadr. L G quam L T, & L G major quam L T, & B G quam B T. Quamobrem circumferentia super B G descripta capax anguli E A F secabit rectam A S; nam similis circumferentia, si super B T describatur, ea continget ipsam in S puncto, quoniam angulus

gulus B S T ipsi E A F æqualis est triangulusque B S T æquicruris.

Porrò quod C D ipsi K æqualis est, sic demonstrabitur. Quia quadratum A G æquale est quadratis ex K & A B: idemque quadratum A G æquale quadratis A B, B G cum duplo rectangulo G B L. Erit propterea quadratum K æquale quadrato B G cum duplo rectangulo G B L. Sicut autem B G ad B E ita est quadratum B G cum duplo rectangulo G B L ad rectangulum G B E cum duplo rectangulo E B L; singula enim ad singula eam habent rationem. Ergo & quadratum K ad rectangulum G B E cum duplo rectangulo E B L ut B G ad B E. Est autem rectangulo G B E æquale rectangulum C B D, quoniam C B ad B G ut E B ad B D, propter triangulos similes C B G, E B D; habent enim angulos ad B æquales & angulum B C G angulo B E D. Item duplo rectangulo E B L æquale est quadratum A B, quia propter triangulos similes ut S A, hoc est, dupla B E ad A B ita A B ad B L. Igitur ut B G ad B E ita erit quadratum K ad rectangulum C B D cum quadrato A B. Sed hisce duobus æquale est rectangulum C A D; quoniam in triangulo C A D angulus A bifariam dividitur à linea A B. Ergo ut B G ad B E ita est quadr. K ad rectangulum C A D. Atque hinc porrò eodem modo ut in casu præcedenti concludemus lineam D C ipsi K æqualem esse, repetendo ista: Sicut autem G B ad B E, &c.

Utrumque præcedentium Aliter.

SIt datus rhombus A D B C cujus productum latus D B. Et data sit linea G. Oportet ducere rectam A N F, ut pars intercepta N F sit datæ G æqualis. TAB. XLII. Fig. 3.

Ducatur diameter A B, & quadratis ex G & A B sit æquale quadratum A H, & ducatur H E ipsi B A parallela. Et A E ipsi G ponatur æqualis, eademque producatur ad F. Dico N F ipsi G æqualem esse.

Quod autem ad H E poni potest A E ipsi G æqualis, hinc

hinc manifestum est. Etenim quadratum A H majus est quadratis A X & X H, quum sit angulus A X H obtusus. Sed idem quadratum A H æquale ponitur quadratis A B seu H X & G. Itaque quadratum G seu A E majus est quadrato A X. Unde apparet intersectionem E accidere inter puncta H & X.

Producatur B D & ponatur ipsi æqualis D R. & sit R K parallela D A vel B C, eique occurrant productæ F A, B A, H E, in punctis M, Q, K: & jungatur R A, & producatur ad P.

Quoniam igitur D R æqualis est D B, & R Q K parallela D A, erit & M A æqualis A N, & Q A æqualis A B; angulus autem B A R rectus, quum sit in semicirculo, nam tres hæ æquales sunt D B, D A, D R. Parallelæ autem sunt B Q, H E K, ergo & anguli ad P recti, & erit H P æqualis P K. Est itaque quadratum A H æquale quadrato A E unà cum rectangulo H E K *. Sed idem quadratum A H æquale est etiam quadratis ex G seu A E, & ex A B. Itaque quadr. A B æquale erit rectangulo K E H. Ac propterea K E ad A B ut A B ad E H. Verum ut K E ad A B seu Q A ita est E M ad M A: & ut A B ad E H ita A F ad F E. Igitur E M ad M A ut A F ad F E: Et proinde E A ad A M ut E A ad E F. Æqualis est igitur E F ipsi A M; quare & ipsi A N. Ideoque & F N ipsi A E, hoc est, datæ G. Quod erat demonstrandum.

* 11. 2 Elem.

TAB. XLII. Fig. 4.

Sit denuo datus rhomdus A D B C, cujus producta latera B D, B C; & data sit linea G. Oportet ducere rectam N F transeuntem per angulum A, quæque æqualis sit ipsi G.

Ducatur diameter B A, eique ad angulos rectos R A L. Si igitur G minor detur quam R L, problema construi nequit, uti supra quoque dictum fuit. Si vero æqualis, jam factum est quod quærebatur. Sit igitur G major quam R L. Erit in schemate adjecto, sicut propositum est, constructio & demonstratio eadem quæ in casu præcedenti.

Illud

Illud autem hic aliter eſt oſtendendum, quod ad lineam H E poni poteſt A E ipſi G æqualis. Sit R S æqualis R B, & jungatur A S. Quoniam igitur in triangulo B A S à vertice ad mediam baſin ducta eſt A R, erunt quadrata B R & R A ſimul ſumpta, hoc eſt, quadratum B A cum duplo quadrato A R, ſubdupla quadratorum B A, A S *. Itaque quadratum A B duplum cum quadruplo quadrato A R, hoc eſt, cum quadrato R L, æquabitur quadratis B A, A S. Quare ablato utrimque quadrato B A, erit quadratum A S æquale quadratis B A & R L, ac proinde minus quam quadr. A H; nam hoc æquale eſt quadratis A B & G. Eſt igitur A S minor quam A H. Sed major eſt quam A R. Ergo punctum S cadit inter R & H; angulus enim A R H obtuſus eſt. Major itaque eſt R H quam R S vel R B. Et quum propter triangulos ſimiles ſit R H ad H P ut R B ad B A, erit quoque H P major quam B A; & quadratum H P majus quadrato A B. At quadratum H P cum quadrato P A æquatur quadrato A H, hoc eſt, quadratis B A & G. Ergo cum quadratum H P ſit majus quadrato A B, erit invicem quadr. P A minus quam quadr. G. Patet igitur quod ſi centro A circumferentia deſcribatur radio A E ipſi G æquali, ea lineam H E ſecabit.

* per 122. lib. 7. Pappi.

PROBL. VIII.

In Conchoide linea invenire confinia flexus contrarii.

Conchoidem intelligimus quam Nicomedes excogitavit; quâ & angulum diviſit trifariam, & duas medias invenit proportionales: Eſto ea C Q D, polus G, regula autem A B cujus ope deſcripta eſt; quam ſecet G Q ad angulos rectos. Hæc igitur lineæ proprietas eſt, ut ductâ ad ipſam rectâ qualibet ex G puncto, pars hujus inter conchoidem & rectam A B intercepta ſit ipſi A Q æqualis. TAB. XLII. Fig. 5.

Quum autem appareat partem quandam Conchoidis ut in ſchemate ſubjecto C Q D verſus polum G cavam eſſe, lineam

verò reliquam in infinitum licet utrimque productam in diversum curvari; quæsitum est qua ratione puncta ea determinari possent ubi contraria flexio initium capit. Et nos quidem ad hoc sequentem invenimus constructionem.

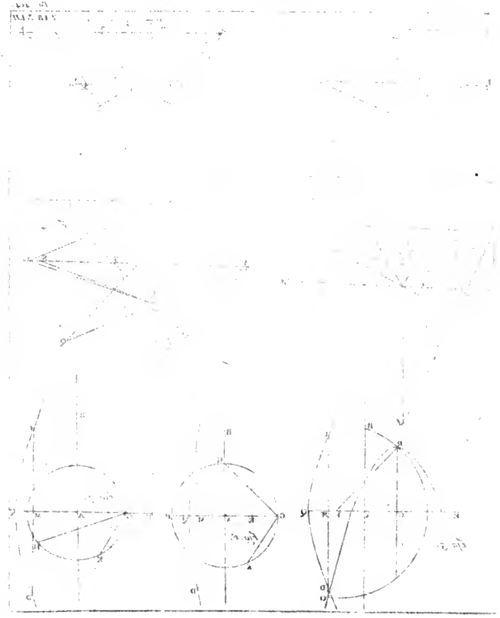
Sit duabus A G, A Q tertia proportionalis A E, sumenda versus G. Et ponatur G F æqualis G E. Porro sit G R ipsi G Q ad angulos rectos, & æqualis duplæ G A. Et describatur parabole R O, cujus vertex sit R axis R G, latus rectum ipsi A G æquale. Centro autem F radio F R circumferentia describatur, quæ parabolen secet in O; & ducatur O C parallela A B occurratque conchoidi in punctis C, D. Hæc erunt puncta quæsita in confinio flexionis contrariæ.

TAB. XLII. Fig. 6. Ista autem Universalis est constructio. At quando quadratum ex A Q non majus est quam duplum quadrati A G, arcus trisectione propositum quoque efficiemus. Et diversè quidem prout A Q major vel minor erit quam A G. Etenim si minor, describenda est circumferentia centro A radio A G, in eaque ponenda G K æqualis duplæ G E, inventæ ut priùs. Et rectæ G H quæ subtendit trientem circumferentiæ K H G æqualis sumenda G M, & per M ducenda ut ante D C ipsi A B parallela. TAB. XLII. Fig. 7. Cum verò A Q major est quam A G, cæteris ad eundem modum compositis, hæc tantum differentia erit quod arcum K P, qui unà cum arcu G K semicircumferentiam explet, in tria æqualia dividere oportet, & partium unam constituere P H, & subtensæ G H æqualem sumere G M.

Porro planum est Problema cum A G æqualis A Q. Tunc enim G M fit æqualis lateri trigoni ordinati in circulo inscripti. Item cum quadratum A Q duplum est quadrati A G: fit enim G M dupla ipsius G A.

Sed & aliis casibus innumeris planum erit, quorum ii quidem facilè discerni poterunt, qui ad anguli trisectionem reducuntur.

F I N I S.



DE
CIRCULI
ET HYPERBOLÆ
QUADRATURA
CONTROVERSIA.

Eee 2

VERA
CIRCULI ET HYPERBOLÆ QUADRATURA
AUTHORE
JACOBO GREGORIO.

LECTORI GEOMETRÆ SALUTEM.

MEcum aliquando cogitabam, amice Lector, num Analytica cum suis quinque operationibus esset sufficiens, & generalis methodus investigandi omnes quantitatum proportiones, ut in initio suæ Geometriæ affirmare videtur Cartesius; si enim ita esset, possibile foret ejus ope toties decantatam circuli quadraturam exhibere: cumque hæc mente revolverem, facile percepi ex hactenus repertis circuli proprietatibus nullam posse analysin institui tali structuræ inservientem: deinde mihi alias quærenti incidit in mentem hujus secunda, prima enim in circulo vulgo est cognita: ex hisce percepi seriem polygonorum convergentem, cujus terminatio est circuli sector; ubi statim vidi

aliquod analyſios veſtigium. deinde ſerierum convergentium naturis non ſolum in facilioribus quibusdam caſibus, ſed etiam in genere conſideratis, & prædictis circuli proprietatibus ad ellipſim & hyperbolam nullo negotio reductis, infallibilis mihi videbatur omnium ſectionum conicarum quadratura: dum autem me illuc converti ut polygonorum ſeriem convergentem terminarem, inſuperabilem difficultatem in ejus terminatione invenienda poſt omnes artis & aleæ conatus deprehendi: Sed animo revolvens analyſios officium eſſe ſicut algebræ communis, non ſolum problemata reſolvere, ſed etiam eorum impoſſibilitatem (ſi opus ſit) demonſtrare; cumque in primo difficultatem indicibilem expertus eſſem, ad ſecundum me converti, quod certe ſupra votum ſucceſſit; non enim ſolius circuli (quam mihi ab initio propoſueram) ſed omnium ſectionum conicarum veram & legitimam in ſua proportionum ſpecie quadraturam, & integram proportionis ſpeciem ante incognitam orbi Geometrico patefacio, quam etiam proportionem ſaltem in relatione ad dimenſionem ſectionum conicarum ad commenſurabilem veræ quam proximam reduco, praxi facili, demonſtrabili, & extractione radicis ſurde ſolidæ (ni fallor) multo breviore; in omni enim proportione incommenſurabili ad tales approximationes recurrunt Mathematici: ut autem melius concipiamus hujus proportionis naturam, loquamur de proportione quatenus ortum habet à quinque ope-

operationibus analyticis, seu arithmeticæ vulgaris, proportio enim nobis notior est in numeris seu in quantitate discreta, quam in continua, neque vereor post Cartesium has operationes in geometriam adducere. Primo itaque sciendum est nos semper nobis proponere quantitates commensurabiles, seu quæ inter se sunt ut numerus ad numerum; proportionem enim incommensurabilem nisi relativè ad commensurabilem nullo modo percipimus, habet enim in se nescio quid infiniti, mentem nostram obtundens & simplicem perceptionem impediens: deinde ex illis quinque operationibus arithmeticis, duæ sunt tantum simplices, additio & substractio; multiplicatio enim est composita ex additione, & divisio ex substractione; & extractio radicum, quæ in genere nihil aliud est quam inventio proportionis commensurabilis, quæ quam proximè accedit ad proportionem analyticam incommensurabilem, componitur ex præcedentibus quatuor; & nostra sexta operatio quæ in genere nihil aliud est quam inventio proportionis commensurabilis, quam proximè accedentis ad nostram proportionem non analyticam, componitur ex prioribus quinque. Advertendum quoque est sicut numeri fracti nunquam procedunt ex integrorum additione, subductione, multiplicatione, sed tantum ex divisione; & numeri incommensurabiles nunquam procedunt ex commensurabilium additione, subductione, multiplicatione, divisione, sed tantum ex radicum extractione;

ita

ita numeros, vel quantitates non analyticas nunquam provenire ex analyticarum additione, subductione, multiplicatione, divisione, radicum extractione, sed ex sexta hac operatione; ita ut hæc nostra inventio addat arithmeticæ aliam operationem, & geometriæ aliam rationis speciem, idem enim est (sicut in hoc tractatulo demonstro) rationem circuli ad diametri quadratum in analytica seu illa rationis specie hactenus cognita exhibere, ac rationem inter quadrati latus & ejusdem diametrum in commensurabilibus: verum certè est me hanc demonstrationem integram ad phrasem geometricam non reduxisse, nam ut hoc perficiatur, opus est non parvo volumine de quantitatum analyticarum mutuo inter se relatione & incommensurabilitate in genere, quod miror nullum unquam scripsisse, cum in his tam latè pateant inventionum campi; nam ex his petenda est demonstratio, quod mesolabium non possit perfici ope regulæ & circini, item quod non semper & quando æquationes affectæ possunt reduci ad puras, item quod necessaria sit ad minimum talis generis curva ad mechanicam talium æquationum resolutionem, cum talibus innumeris, quæ à præstantioribus geometris impossibilia esse deprehenduntur ex analysi, & à rudioribus quotidie & frustra quæruntur. Scripsit Euclides decimum suum librum solummodo (nisi in paucis quibusdam propositionibus generalibus) de incommensurabilitate facta ab extractione radicis quadratæ;

tæ ; neque quantum ſcio ab ullo alio tractata eſt hæc materia, etiamſi geometriæ ſpeculativæ non ſolum utiliſſima ſit, ſed etiam maxime admirabilis; in ipſo enim limine admiranda occurrunt theoremata; e.g. Si fuerit progreſſio geometrica cujus unus terminus fuerit propoſitæ quantitati commenſurabilis longitudine vel poteſtate quacunque, & alius quilibet, binomium, trinomium, &c. quodcunque, impoſsibile eſt duos totius progreſſionis terminos in infinitum continuatæ eſſe inter ſe commenſurabiles longitudine vel poteſtate quacunque: alia multa poſſem afferre, ſed pro commodiore fortaſſis tempore hæc reſervo, ſatis exiſtimans pro præſenti hæc analyticè demonſtraſſe; etſi enim analyſis aſſenſum adeo violenter non cogat ac geometria, nunquam tamen reſpuit nec reſpuere poteſt geometria, quod probavit ſemel analyſis geometrica. Ex hac inventione deduco quoque novam ſectionem angularium & logorithmorum doctrinam, facilem quidem, in praxi expeditiſsimam & geometrica demonſtratione munitam; hactenus enim logorithmorum conſtructio prolixiſſima, conjectura potius quam ſcientia videbatur, & diviſio anguli in partes æquales ultra quinque numero primo numeratas in praxim vix admitti poterat. hæc omnia ſumma (qua poſſum) brevitate & perſpicuitate demonſtro; neque ſcrupuloſus ſum in citationibus, utpote peregrinus, & libris ad talè opus deſtitutus, te enim ſuppono in geometricis non mediocriter verſatum, alioquin nul-

lum hinc fructum colliges.

DEFINITIONES.

1 Si in circulo, ellipse vel hyperbola ducantur è centro in ejus perimetrum duæ rectæ, appellamus planum ab illis rectis & perimetri segmento comprehensum, sectorem.

2 Si perimetri segmentum inter illas rectas comprehensum à rectis quotcumque subtendatur, ita ut triangula rectilinea (quorum communis vertex est sectionis centrum & bases rectæ subtendentes) sint æqualia; vocamus rectilineum illud ab istis triangulis conflatum, polygonum regulare inscriptum, si sectio conica fuerit circulus vel ellipsis; quod si fuerit hyperbola, vocamus illud rectilineum polygonum regulare circumscriptum.

3 Si perimetri segmentum inter illas rectas comprehensum à rectis quotcunque tangatur & à tactibus ad sectionis centrum ducantur rectæ; si inquam omnia trapezia, a tangentibus proximis & rectis ad centrum comprehensa, fuerint æqualia; appello rectilineum ab illis conflatum, polygonum regulare circumscriptum, si sectio conica sit ellipsis vel circulus, & polygonum regulare inscriptum si fuerit hyperbola.

4 Si omnes anguli (excepto illo ad sectionis centrum) polygoni regularis à subtendentibus comprehensi insistant

omni-

omnibus contactum punctis polygoni regularis à tangentibus comprehensi, appello hæc polygona complicata.

5 Quantitatem dicimus à quantitatibus esse compositam, cum à quantitatum additione, subductione, multiplicatione, divisione, radicum extractione, vel quacunque alia imaginabili operatione, fit alia quantitas.

6 Quando quantitas componitur ex quantitatum additione, subductione, multiplicatione, divisione, radicum extractione; dicimus illam componi analyticè.

7 Quando quantitates à quantitatibus inter se commensurabilibus analyticè componi possunt, dicimus illas esse inter se analyticas.

8 Si à quantitatibus quotcunque A, B, C, D, E, componatur quantitas X, & à quantitatibus F, G, C, D, E, componatur quantitas Z, eâdem omnino methodo & iisdem omnino operationibus quibus antè componebatur X, positis quantitatibus F, G, loco quantitatum A, B, si inquam hoc fiat. dicimus quantitatem X eodem modo componi à quantitatibus A, B, quo Z componitur à quantitatibus F, G.

9 Sint duæ quantitates A, B, à quibus componantur duæ aliæ quantitates C, D, quarum differentia sit minor differentia quantitatum A, B, & eodem modo quo C, componitur à quantitatibus A, B, componatur E à quantitatibus C, D; & eodem modo quo D componitur à quantitatibus A, B, componatur F, à quantitatibus C, D; & eo-

A	B
C	D
E	F
G	H

eodem modo quo E componitur à quantitatibus C, D, vel C à quantitatibus A, B, componatur G à quantitatibus E, F; & eodem modo quo F componitur à quantitatibus C, D, vel D à quantitatibus A, B, componatur H à quantitatibus E, F; atque ita continuetur series: appello hanc seriem, seriem convergentem.

10 Ejus termini juxta se positi nempe A, B, vel C, D, vel E, F, vel G, H, dicuntur termini convergentes.

PETITIONES.

1 Petimus quantitates, à quantitatibus datis inter se analyticis analyticè compositas, esse inter se & cum quantitatibus datis analyticas.

2 Item quantitates, quæ à quantitatibus datis inter se analyticis non possunt analyticè componi, non esse cum quantitatibus datis analyticas.

Præcedentes petitiones quibusdam fortassis obscuræ videbuntur, sed tamen ex analyseos elementis sunt satis manifestæ.

VERA

VERA
CIRCULI ET HYPERBOLÆ
QUADRATURA.

Sit circuli, ellipſeos vel hyperbolæ ſegmentum B I P cujus centrum A: compleatur triangulum A B P, & ſegmentum in punctis, B, P, tangentes ducantur rectæ B F, P F, ſe invicem ſecantes in puncto F; producatur (ſi opus ſit) recta A F ſegmentum interſecans in puncto I & rectam B P in puncto Q; deinde jungantur rectæ B I, P I. TAB. XLIII. Fig. 1. 2.

PROP. I. THEOREMA.

Dico trapezium B A P I *eſſe medium proportionale inter trapezium* B A P F, *&* *triangulum* B A P.

Quoniam recta A Q ducitur per F concurſum duarum rectarum F B, F P, ſegmentum in punctis B, P, tangentium; igitur recta A Q rectam B P contactuum puncta jungentem bifariam ſecabit in puncto Q; & proinde triangulum A B Q eſt æquale triangulo A Q P, & triangnlum F B Q triangulo F Q P; & igitur triangulum A B F æquale eſt triangulo A P F; eſt ergo triangulum A B F dimidium trapezii A B F P: eodem modo probatur triangulum A B I eſſe dimidium trapezii A B I P; & triangulum A B Q eſt dimidium trianguli A B P: cumque triangula A B F, A B I, A B Q, eandem habeant altitudinem, inter ſe ſunt ut baſes, ſed eorum baſes nempe A F, A I, A Q, ſunt continuè proportionales; & igitur ipſa quoque triangula ſunt continuè proportionalia; & proinde eorum dupla nimirum trapezia A B F P, A B I P, & triangulum A B P ſunt continuè proportionalia in ratione A F ad A I, quod demonſtrare oportuit.

 Du-

Ducatur recta D L segmentum tangens in puncto I, & rectis B F, F P, occurrens in punctis D, L, ita ut compleatur polygonum A B D L P.

PROP. II. THEOREMA.

TAB. XLIII. Fig. 1. 2. 3. *Dico trapezia* A B F P, A B I P *simul, esse ad duplum trapezii* A B I P, *sicut trapezium* A B F P *ad polygonum* A B D L P.

Quoniam recta A F, ducta per contactum rectæ D L cum segmento, ducitur etiam per concursum duarum rectarum F B, F P, rectam D L terminantium & segmentum in duobus punctis tangentium; igitur recta D L bifariam secatur in puncto I; & proinde triangulum F D I æquale est triangulo F I L, at triangulum A B F æquale est triangulo A P F; & igitur trapezium A B D I æquale est trapezio A P L I; trapezium ergo A P L I dimidium est polygoni A B D L P. ducatur recta A L: manifestum est ex præcedentis demonstratione triangulum A I L esse æquale triangulo A L P; sed ut triangulum A L F ad triangulum A L I ita F A ad A I, & ut F A ad A I ita trapezium A B F P ad trapezium A B I P; & igitur ut trapezium A B F P ad trapezium A B I P; ita triangulum A L F ad triangulum A L I; & componendo, ut trapezia A B F P, A B I P simul, ad trapezium A B I P, ita triangulum A F L & triangulum A I L simul, hoc est triangulum A F P, ad triangulum A I L: & consequentes duplicando, ut trapezia A B F P, A B I P simul, ad duplum trapezii A B I P, ita triangulum A F P, ad trapezium A I L P: at triangulum A F P est dimidium trapezii A B F P, & trapezium A I L P est dimidium polygoni A B D L P; & igitur ut trapezia A B F P, A B I P simul, ad duplum trapezii A B I P, ita trapezium A B F P ad polygonum A B D L P, quod demonstrare oportuit.

PROP.

PROP. III. THEOREMA.

Dico triangulum B A P, *& trapezium* A B I P *simul, esse ad trapezium* A B I P, *ut duplum trapezii* A B I P *ad polygonum* A B D L P. TAB. XLIII. Fig. 1. 2. 3.

In antecedente demonstratum est trapezia A B F P, A B I P simul, esse ad duplum trapezii A B I P, sicut trapezium A B F P ad polygonum A B D L P: & permutando trapezia A B F P, A B I P simul, sunt ad trapezium A B F P, ut duplum trapezii A B I P ad polygonum A B D L P. & quoniam trapezium A B F P, trapezium A B I P & triangulum A B P, sunt continuè proportionalia; erit trapezium A B I P ad trapezium A B F P, ut triangulum A B P ad trapezium A B I P; & componendo, ut trapezia A B I P, A B F P simul, ad trapezium A B F P, ita triangulum A B P & trapezium A B I P simul, ad trapezium A B I P: erat autem, ut trapezia A B I P, A B F P, simul, ad trapezium A B F P, ita duplum trapezii A B I P ad polygonum A B D L P; & igitur ut triangulum A B P & trapezium A B I P simul, ad trapezium A B I P, ita duplum trapezii A B I P ad polygonum A B D L P, quod demonstrare oportuit.

Producantur (si opus sit) rectæ A D, A L, segmentum secantes in punctis E & O, & rectas B I, I P, in H & M: deinde jungantur rectæ B E, E I, I O, O P, ut compleatur polygonum A B E I O P.

PROP. IV. THEOREMA.

Dico polygonum A B E I O P *esse medium proportionale inter polygonum* A B D L P *& trapezium* A B I P. TAB. XLIII. Fig. 1. 2. 3.

Ex hujus prima manifestum est trapezium A I L P, trapezium A I O P & triangulum A I P esse continuè pro-

proportionalia, & ex prædictis satis facile colligi potest trapezium A I L P esse dimidium polygoni A B D L P & trapezium A I O P esse dimidium polygoni A B E I O P & triangulum A I P esse dimidium trapezii A B I P: & proinde terminos duplicando, polygonum A B D L P, polygonum A B E I O P & trapezium A B I P sunt continuè proportionalia, quod demonstrare oportuit.

Ducantur rectæ C G, K N, segmentum tangentes in punctis E, O, & rectis D L, D B, L P, occurrentes in punctis C, G, K, N, ut compleatur polygonum A B C G K N P.

PROP. V. THEOREMA.

TAB. XLIII. Fig. 1. 2. 3.

Dico trapezium A B I P *& polygonum* A B E I O P *simul, esse ad polygonum* A B E I O P, *ut duplum polygoni* A B E I O P *ad polygonum* A B C G K N P.

Ex hujus tertia manifestum est triangulum A B I & trapezium A B E I simul, esse ad trapezium A B E I, ut duplum trapezii A B E I ad polygonum A B C G I: & ex prædictis facile concludi potest triangulum A B I esse dimidium trapezii A B I P, & trapezium A B E I esse dimidium polygoni A B E I O P, & polygonum A B C G I esse dimidium polygoni A B C G K N P; & proinde terminos duplicando, trapezium A B I P & polygonum A B E I O P simul, erunt ad polygonum A B E I O P ut duplum polygoni A B E I O P ad polygonum A B C G K N P, quod demonstrandum erat.

Hinc facile colligi potest polygonum A B C G K N P esse medium harmonicum inter polygona A B E I O P, A B D L P, quod hic admonuisse sufficiat, in sequentibus enim demonstrabitur.

SCHO-

S C H O L I U M.

Duæ præcedentes propoſitiones eodem modo demonſtrari poſſunt de duobus quibuſcunque polygonis complicatis loco polygonorum complicatorum ABIP, ABDLP; polygonum enim à tangentibus comprehenſum tot continet æqualia trapezia, quot continet polygonum à ſubtendentibus comprehenſum æqualia triangula: atque hinc evidens eſt has polygonorum analogias ita ſe habere in infinitum, ducendo nimirum rectas AN, AK, AG, AC, per puncta R, T, S, V, & adhuc alia & alia polygona intra & extra ſemper ſcribendo: notandum nos appellare hanc polygonorum inſcriptionem & circumſcriptionem, inſcriptionem & circumſcriptionem ſubduplam, ex prædictis patet (ſi ponatur triangulum A B P $= a$, & trapezium A B F P $= b$) trapezium A B I P eſſe $vq\,ab$ & polygonum A B D L P $\frac{2ab}{a + vq\,ab}$: eodem modo poſito trapezio A B I P $= c$, & polygono A B D L P $= d$, erit polygonum A B E I O P $= vq\,cd$ & polygonum A B C G K N P $= \frac{2cd}{c + vq\,cd}$, ita ut evidens ſit hanc polygonorum ſeriem eſſe convergentem; atque in infinitum illam continuando, manifeſtum eſt tandem exhiberi quantitatem ſectori circulari, elliptico vel hyperbolico A B E I O P æqualem; differentia enim polygonorum complicatorum in ſeriei continuatione ſemper diminuitur, ita ut omni exhibita quantitate fieri poſſit minor, ut in ſequentis theorematis Scholio demonſtrabimus: ſi igitur prædicta polygonorum ſeries terminari poſſet, hoc eſt, ſi inveniretur ultimum illud polygonum inſcriptum (ſi ita loqui liceat) æquale ultimo illi polygono circumſcripto, daretur infallibiliter circuli & hyperbolæ quadratura: ſed quoniam difficile eſt, & in geometria omnino fortaſſe inauditum tales ſeries terminare; præmittendæ ſunt quædam propoſitiones è quibus inveniri poſſint hujuſmodi aliquot ſerierum terminationes, & tandem (ſi

 fieri

fieri possit) generalis methodus inveniendi omnium serierum convergentium terminationes.

PROP. VI. THEOREMATA.

TAB. XLIII. Fig. 1. 2. 3. *Dico differentiam inter triangulum* ABP *& trapezium* ABFP *majorem esse duplo differentiæ inter trapezium* ABIP *& polygonum* ABDLP.

Sit triangulum A B P, A; trapezium A B F P, B; trapezium ABIP, C, & polygonum ABDLP, D: quoniam A est ad C ut C ad B, igitur ut differentia inter A & C ad A, ita differentia inter C & B ad C; & permutando, ut differentia inter A & C ad differentiam inter C & B ita A ad C; & componendo, ut differentia inter A & C & differentia inter C & B simul, hoc est differentia inter A & B, ad differentiam inter C & B, ita A † C ad C; sed ut A † C ad C ita 2 C ad D, & ideo differentia inter A & B est ad differentiam inter C & B ut 2 C ad D. quoniam A † C est ad C ut 2 C ad D, erit permutando ut A † C ad 2 C ita C ad D; & dividendo, ut differentia inter A & C ad 2 C ita differentia inter C & D ad D; & permutando, differentia inter A & C est ad differentiam inter C & D ut 2 C ad D; sed demonstratum est differentiam inter A & B esse ad differentiam inter C & B ut 2 C ad D; & proinde differentia inter A & B est ad differentiam inter C & B, ut differentia inter A & C ad differentiam inter C & D; sed differentia inter A & B est major differentia inter C & B, & ideo differentia inter A & C est major differentia inter C & D: & prædictam analogiam permutando, differentia inter A & B est ad differentiam inter A & C, ut differentia inter C & B ad differentiam inter C & D; at differentia inter A & B est major differentia inter A & C, & ideo differentia inter C & B est major differentia inter C & D; atque differentia inter A & B æqualis est differentiis, inter A & C, inter C & B; cumque earum utravis sit major differentia inter

ter

ter C & D, manifeſtum eſt differentiam inter A & B majorem eſſe duplo differentiæ inter C & D, hoc eſt differentiam inter triangulum A B P & trapezium A B F P majorem eſſe duplo differentiæ inter trapezium A B I P, & polygonum A B D L P, quod demonſtrare oportuit.

SCHOLIUM.

Eodem prorſus modo demonſtratur differentiam inter trapezium A B I P & polygonum A B D L P majorem eſſe duplo differentiæ inter polygonum A B E I O P & polygonum A B C G K N P. denique eodem modo demonſtrari poteſt hic differentiarum exceſſus in ſubdupla noſtra polygonorum complicatorum deſcriptione in infinitum; differentia enim priorum nempe inſcripti & circumſcripti major ſemper erit duplo differentiæ immediatè ſequentium nimirum inſcripti quoque & circumſcripti, & proinde aufertur majus quam dimidium a priorum differentia ut fiat differentia immediatè ſequentium; & igitur continuando ſubduplam polygonorum deſcriptionem, inveniri poſſunt duo polygona complicata, quorum differentia ſit minor qualibet exhibita quantitate, ut in præcedentis Scholio aſſumpſimus.

Sint duæ quantitates indefinitæ a minor b major, ſintque datæ duæ rationes majoris inæqualitatis c ad d, & c ad e; deinde ſit ut c ad d ita $b-a$ ad $\frac{bd-ad}{c}$ cui addatur quantitas a ut fiat $\frac{ca+bd-ad}{c}$, quæ quantitas ponatur immediate ſub a: fiatque ut c ad e ita $b-a$ ad $\frac{be-ae}{c}$, quæ quantitas ſubſtrahatur ex b & relictum nempe $\frac{bc-be+ae}{c}$ ponatur ſub b. continuetur deinde ſeries convergens cujus primi termini convergentes ſunt a, b, & ſecundi termini convergentes $\frac{ca+bd-ad}{c}$, $\frac{bc-be+ae}{c}$. manifeſtum eſt terminum $\frac{ca+bd-ad}{c}$ majorem

c	d	a	b
	e	$\frac{ca+bd-ad}{c}$	$\frac{bc-be+ae}{c}$

eſſe

esse termino a, quoniam termino a additur $\frac{bd-ad}{c}$ ut fiat terminus $\frac{ca+bd-ad}{c}$: manifestum quoque est terminum $\frac{ca+bd-ad}{c}$ minorem esse termino b, quoniam differentia inter a & b est ad differentiam inter a & $\frac{ca+bd-ad}{c}$ in ratione majoris inæqualitatis: evidens quoque est terminum $\frac{bc-be+ae}{c}$ minorem esse termino b. quoniam ex b substrahitur $\frac{be-ae}{c}$ ut fiat $\frac{bc-be+ae}{c}$; manifestum etiam est terminum $\frac{bc-be+ae}{c}$ majorem esse termino a, quoniam differentia inter a & b est ad differentiam inter $\frac{bc-be+ae}{c}$ & b in ratione majoris inæqualitatis: evidens igitur est differentiam inter terminos convergentes a & b majorem esse differentiâ inter terminos convergentes $\frac{ca+bd-ad}{c}$ & $\frac{bc-be+ae}{c}$. sed quoniam termini convergentes a & b ponuntur indefiniti, possunt a & b sumi loco quorumlibet terminorum convergentium totius hujus seriei; & positis a & b pro terminis hujus seriei convergentibus quibuscunque, sequitur necessario ex seriei compositione $\frac{ca+bd-ad}{c}$, $\frac{bc-be+ae}{c}$ esse terminos convergentes immediatè sequentes: cumque differentia terminorum a & b major sit differentia terminorum $\frac{ca+bd-ad}{c}$ & $\frac{bc-be+ae}{c}$, evidens est differentiam terminorum convergentium priorum semper esse majorem differentia terminorum convergentium immediatè sequentium; & igitur quò magis continuatur hæc series convergens eò minor fit differentia terminorum convergentium: & quoniam hæc differentiarum diminutio semper fit proportionaliter nempe in ratione $b-a$ ad $\frac{bc-be+ae-ca-bd+ad}{c}$; igitur possunt inveniri hujus seriei termini convergentes quorum differentia sit omni exhibita quantitate minor; & igitur imaginando hanc seriem in infinitum continuari, possumus imaginari ultimos terminos convergentes esse æquales, quos

quos terminos æquales appellamus ſeriei terminationem.

PROP. VII. PROBLEMA.

Oportet prædictæ ſeriei terminationem invenire.

Ut huic problemati ſatisfiat, oportet primò invenire quantitatem quæ eodem modo componitur ex terminis convergentibus a, b, quo ex terminis convergentibus $\frac{ca+bd-ad}{e}$, $\frac{bc-be+ae}{e}$, hoc autem facile fit hoc modo: inveniatur quantitas quæ multiplicata in a & addita b multiplicata in quantitatem datam m, eandem quantitatem facit ac ſi multiplicaretur in $\frac{ca+bd-ad}{e}$ & adderetur $\frac{bc-be+ae}{e}$ multiplicata etiam in eandem quantitatem datam m. ſit quantitas illa z, & proinde $za+bm$ æquatur $\frac{zca+zbd-zad+mbc-mbe+mae}{e}$, & æquatione reducta invenitur $z=\frac{mae-mbe}{ad-bd}$; quæ quantitas ſive multiplicata in a & addita m, ſive multiplicata in $\frac{ca+bd-ad}{e}$ & addita $\frac{mbc-mbe+mae}{e}$ efficit eandem in utroque caſu quantitatem nempe $\frac{maae-mbae+mbad-mbbd}{cd-bd}$: & proinde prædicta quantitas eodem modo componitur ex terminis convergentibus a, b, quo componitur ex terminis convergentibus $\frac{ca+bd-ad}{e}$, $\frac{bc-be+ae}{e}$. atque a & b quoniam ſunt quantitates indefinitæ poſſunt eſſe quilibet totius ſeriei termini convergentes, modò termini convergentes immediatè ſequentes ſint $\frac{ca+bd-ad}{e}$ & $\frac{bc-be+ae}{e}$, & proinde quantitas $\frac{maae-mbae+mbad-mbbd}{cd-bd}$ eodem modo componitur ex quibuslibet totius ſeriei terminis convergentibus quo componitur ex terminis convergentibus a, b; & igitur prædicta

dicta quantitas eodem etiam modo componitur ex ultimis ejus terminis convergentibus, qui æquales sunt: sit ultimus ille terminus x qui multiplicatus in $\frac{mae - mbe}{ad - bd}$ & in m efficit xm & $\frac{xmae - xmbe}{ad - bd}$, quorum factorum summa nempe $\frac{xmae - xmbe + xmad - xmbd}{ad - bd}$ æquatur $\frac{maae - mbae + mbad - mbbd}{ad - bd}$ & æquatione reducta invenitur x seu seriei terminatio $\frac{aae - bae + bad - bbd}{ae - be + ad - bd}$, quam invenire oportuit.

Ne minus exercitatis obscurum videatur hoc problema, illud in numeris illustrabimus: sit $c\ 7,\ d\ 2,\ e\ 3,\ a\ 28,\ b\ 42,$ erunt secundi termini convergentes $32,\ 36,$ tertii $33\frac{1}{7}$, $34\frac{2}{7}$. & ejus terminatio $33\frac{3}{5}$.

Neminem moveat, quod (etiamsi a sit minor quam b) $\frac{ea + bd - ad}{c}$ possit esse major quam $\frac{bc - be + ae}{c}$, analyticè enim major à minore potest substrahi, cujus tamen exemplum non gravabimus exhibere, sit $c\ 7,\ d\ 5,\ e\ 4,\ a\ 28,\ b\ 42;$ erunt secundi termini convergentes $38,\ 34.$ & tertii $35\frac{1}{7}$, $36\frac{2}{7}$, ejusque terminatio $35\frac{7}{9}$.

Animadvertendum est hujus problematis solutionem eodem modo se habere, etiamsi loco a ponatur cyphra seu merum nihil, Ex. Gr; sit $c\ 8,\ d\ 3,\ e\ 4,\ a\ 0,\ b\ 24;$ erunt secundi termini convergentes $9,\ 12,$ & tertii $10\frac{1}{8}$, $10\frac{1}{2}$, & seriei terminatio $10\frac{2}{7}$,

Harum etiam serierum terminationes possunt inveniri ex Gregorii à S. Vincentio lib. de progress. geometrica, etiamsi methodo longe ab hac diversa.

PROP.

PROP. VIII. PROBLEMA.

***Sint duæ quantitates datæ* A, B, *& ratio quælibet data* C *ad* D*: oportet invenire aliam quantitatem, ut ratio ejus ad* A *ſit multiplicata rationis* B *ad* A *in ratione* C *ad* D.**

EDC AFBG

Sit primò ratio C ad D commenſurabilis, ſitque inter C & D communis menſura E; & quoties E continetur in D toties ſit ratio F ad A ſubmultiplicata rationis B ad A; & quoties E continetur in C toties ſit ratio G ad A multiplicata rationis F ad A: dico G eſſe quantitatem illam quæſitam. ratio G ad A eſt multiplicata rationis F ad A in ratione C ad E, & ratio F ad A eſt multiplicata rationis B ad A in ratione E ad D; & igitur ex æqualitate, ratio G ad A eſt multiplicata rationis B ad A in ratione C ad D, quod demonſtrare oportuit.

Quod ſi ratio C ad D ſit incommenſurabilis, geometricam hujus problematis praxim eſſe impoſſibilem mihi perſuadeo; approximatione tamen fieri poteſt, aſſumendo rationem commenſurabilem ejus loco, quæ quàm proximè ad illam accedat.

		GH	AB
	N	IK	CD
M		RS	EF
	O	TV	XY
		L	Z

Sit ſeries convergens, cujus primi termini convergentes ſint A, B, ſecundi C, D, tertii E, F; ſintque ſecundi termini ita facti à primis, ut ratio B majoris ad A minorem ſit multiplicata rationis C ad A in ratione data mojoris inæqualitatis M ad N, & ut ratio B ad A ſit multiplicata rationis D ad A in ratione data majoris inæqualitatis M ad O: ſintque tertii termini eodem modo facti ex ſecundis quo ſecundi facti ſunt ex primis; atque ita continuetur ſeries.

PROP.

PROP. IX. PROBLEMA.

Oportet prædictæ feriei terminationem invenire.

Ponatur G cyphra feu nihil hoc eft exponens rationis æqualitatis, feu rationis A ad A; fitque H ad libitum exponens rationis B ad A: fit ut M ad N ita differentia inter G & H, hoc eft ipfa H vel exponens rationis B ad A ad exceffum quo I fuperat G hoc eft ipfam I, fed ut M ad N ita ratio B ad A eft multiplicata rationis C ad A; & igitur Exceffus quo I fuperat G hoc eft ipfa I eft exponens rationis C ad A. fit ut M ad O ita differentia inter G & H hoc eft H ad exceffum quo K fuperat G hoc eft ipfam K, fed ut M ad O ita ratio B ad A eft multiplicata rationis D ad A, cumque H fit exponens rationis B ad A, erit K exponens rationis D ad A: fi igitur I fit exponens rationis C ad A & K exponens rationis D ad A; erit exceffus quo K fuperat I exponens rationis D ad C. deinde fit ut M ad N ita exceffus quo K fuperat I feu exponens rationis D ad C ad exceffum quo R fuperat I, fed ut M ad N ita ex feriei compofitione ratio D ad C eft multiplicata rationis E ad C, atque exceffus quo K fuperat I eft exponens rationis D ad C; & proinde exceffus quo R fuperat I eft exponens rationis E ad C, atque I eft exponens rationis C ad A, & proinde R eft exponens rationis E ad A. deinde fit ut M ad O ita exceffus quo K fuperat I ad exceffum quo S fuperat I, fed ut M ad O ita ex feriei compofitione ratio D ad C eft multiplicata rationis F ad C, cumque exceffus quo K fuperat I fit exponens rationis D ad C; erit exceffus quo S fuperat I exponens rationis F ad C, atque I eft exponens rationis C ad A, & proinde S eft exponens rationis F ad A: cum igitur R fit exponens E ad A & S exponens rationis F ad A; erit exceffus quo S fuperat R exponens rationis F ad E: & utramque feriem continuando, demonftratur ut antè T effe exponentem rationis X ad A, & V effe expo-

exponentem rationis Y ad A; denique ſemper demonſtrabitur terminos convergentes ſeriei exponentium eſſe exponentes rationum, terminorum convergentium ſeriei propoſitæ ad primam ſeriei quantitatem A, modò utriuſque ſeriei termini convergentes ſint in eodem ab initio ordine: & proinde terminatio ſeriei exponentium per hujus 7 inventa, quæ Ex: Gr: ſit L, erit exponens rationis, terminationis ſeriei propoſitæ ad primum terminum A: inveniatur igitur ratio Z ad A quæ ſit multiplicata rationis datæ B ad A in ratione data L ad H; eritque Z terminatio quæſita, quam invenire oportuit.

Ad hoc problema in numeris illuſtrandum ſit M 4, N 2, O 1, A 6, B 10; erunt ſecundi termini convergentes $\surd q60$, $\surd qq2160$, tertii termini convergentes $\surd qqq7776000$, $\surd qqqq100776960000000$, & ſeriei terminatio $\surd c360$.

Aliud exemplum, ſit M 6, N 2, O 3, A 5, B 10; erunt ſecundi termini convergentes $\surd c250$, $\surd q50$. tertii termini convergentes $\surd qcc488281250000000$, $\surd qqc78125000000$, & ſeriei terminatio $\surd s12500$. hactenus terminavimus omnes ſeries convergentes quæ fieri poſſunt vel à ſola proportione arithmetica vel a ſola proportione geometrica, nunc vero methodum aggredimur, cujus ope omnium ſerierum convergentium terminationes (ſi modò ſint in rerum natura) inveniri poſſunt.

PROP. X. PROBLEMA.

Ex data quantitate, eodem modo compoſita à duobus terminis convergentibus cujuſcunque ſeriei convergentis, quo componitur ex terminis convergentibus ejuſdem ſeriei immediatè ſequentibus; ſeriei propoſitæ terminationem invenire.

Sit ſeries convergens, cujus duo termini convergentes quicunque ſint a, b, & termini convergentes immediatè ſe-

ſequentes $\sqrt{ab}$, $\frac{aa}{\sqrt{ab}}$ ſumma terminorum convergentium $a+b$ multiplicata in terminum convergentem primum a efficit $aa+ab$: & ſumma terminorum convergentium immediate ſequentium nempe $\sqrt{ab}+\frac{aa}{\sqrt{ab}}$ multiplicata in primum terminum convergentem $\sqrt{ab}$ efficit etiam $aa+ab$; ex his invenienda ſit ſeriei propoſitæ terminatio. manifeſtum eſt quantitatem $aa+ab$ eodem modo fieri à terminis convergentibus a, b, quo à terminis convergentibus immediatè ſequentibus $\sqrt{ab}$, $\frac{aa}{\sqrt{ab}}$: & quoniam quantitates a, b, indefinitæ ponuntur pro quibuslibet totius ſeriei terminis convergentibus, evidens eſt ſummam quorumcunque terminorum convergentium propoſitæ ſeriei multiplicatam in primum terminum convergentem efficere quantitatem æqualem illi, quæ fit à ſumma terminorum convergentium immediatè ſequentium multiplicata etiam in primum ſuum terminum convergentem; cumque duo termini convergentes duos terminos convergentes ſemper immediatè ſequuntur, manifeſtum eſt ſummam duorum quorumlibet terminorum convergentium multiplicatam in primum ſemper efficere eandem quantitatem nempe $aa+ab$, atque ultimi termini convergentes ſunt æquales, & proinde ſit ultimus ille terminus ſeu ſeriei terminatio z, quæ ſibi addita & in ſummam multiplicata efficit $2zz$, quæ quantitas debet eſſe æqualis quantitati $aa+ab$, & æquatione reſoluta dabitur z ſeu ſeriei terminatio $\sqrt{\frac{aa+ab}{2}}$ quam invenire oportuit.

Et proinde ad inveniendam cujuscunque ſeriei convergentis terminationem; opus eſt ſolummodo invenire quantitatem eodem modo compoſitam ex terminis convergentibus primis, quo componitur eadem quantitas ex terminis convergentibus ſecundis.

CONSECTARIUM.

Quoniam non refert in problemate ſive termini convergentes a, b, ſint primi, ſecundi, vel tertii &c; manifeſtum eſt omnes

omnes feriei convergentis terminationem eodem modo esse compositam ex terminis convergentibus primis quo ex terminis convergentibus secundis, tertiis, vel quartis, &c.

PROP. XI. THEOREMA.

Dico sectorem circuli, ellipseos vel hyperbolæ ABIP *non esse compositum analyticè à triangulo* ABP *& trapezio* ABFP. TAB. XLIII. Fig. 1. 2. 3.

Ponatur triangulum ABP ^{a} & trapezium ABFP ^{b}: manifestum est ex prædictis trapezium ABIP esse $Vq2b$ & polygonum ABDLP $\frac{2ab}{a \dagger Vq2b}$, item sectorem ABIP esse hujus seriei convergentis terminationem. ut ex seriei terminis auferantur signa radicis & fractionis, pro ^{a} & ^{b} primis seriei terminis convergentibus, hoc est pro triangulo ABP & trapezio ABFP ponantur $a^{3} \dagger a^{2}b$ & $ab^{2} \dagger b^{3}$; eruntque secundi seriei termini convergentes, hoc est trapezium ABIP & polygonum ABDLP, $ba^{2} \dagger b^{2}a$ & $2b^{2}a$, dico seriei convergentis (cujus primi termini convergentes sunt $a^{3} \dagger a^{2}b$, $ab^{2} \dagger b^{3}$, & secundi sunt $ba^{2} \dagger b^{2}a$, $2b^{2}a$) terminationem non esse compositam analyticè a terminis $a^{3} \dagger a^{2}b$, $ab^{2} \dagger b^{3}$: si enim componatur prædicta terminatio analyticè a terminis convergentibus $a^{3} \dagger a^{2}b$, $ab^{2} \dagger b^{3}$; componetur etiam eadem terminatio analyticè & eodem omnino modo à terminis convergentibus $ba^{2} \dagger b^{2}a$, $2b^{2}a$; & proinde eadem quantitas, nempe prædicta terminatio, eodem modo componitur analyticè ex terminis $a^{3} \dagger a^{2}b$, $ab^{2} \dagger b^{3}$, quo componitur ex terminis $ba^{2} \dagger b^{2}a$, $2b^{2}a$,

sed nulla quantitas potest eodem modo analyticè componi ex terminis $a^{3} \dagger a^{2}b$, $ab^{2} \dagger b^{3}$, quo componitur ex terminis $ba^{2} \dagger b^{2}a$, $2b^{2}a$, quod sic demonstro. si analyticè componeretur quantitas ex terminis $a^{3} \dagger a^{2}b$, $ab^{2} \dagger b^{3}$,

$$\begin{array}{cc} a^{3} \dagger a^{2}b & ab^{2} \dagger b^{3}. \\ ba^{2} \dagger b^{2}a & 2b^{2}a \end{array}$$

eodem modo, quo analyticè componitur eadem quantitas ex terminis $ba^2 + b^2a$, $2b^2a$; addendo, ſubtrahendo, multiplicando & dividendo terminos $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$ & radices ex factis extrahendo, eadem fieret quantitas ac ſi eodem modo adderentur, ſubducerentur, multiplicarentur & dividerentur termini $ba^2 + b^2a$, $2b^2a$, & radices eædem ex factis extraherentur, ſed poſterius fieri non poteſt, ergo nec prius, minorem ſic probo, ſi eadem fieret quantitas ex additione, ſubductione, multiplicatione, diviſione & radicum extractione terminorum $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$, quæ fieret ex eadem additione, ſubductione, multiplicatione, diviſione & radicum extractione terminorum $ba^2 + b^2a$, $2b^2a$; tunc addendo æquales quantitates terminis $a^3 + a^2b$, $ba^2 + b^2a$, vel ab illis ſive ipſorum factis æquales quantitates ſubducendo, vel illos ſive ipſorum factos æqualibus quantitatibus multiplicando vel dividendo, vel denique illos ſive ipſorum factos eodem modo in ſe multiplicando, vel ex iisdem easdem radices extrahendo, haſce analyticas operationes aliquo modo mutando, reiterando vel utrumque vel neutrum faciendo, fieri poſſent duo ultima producta, nempe unum à termino $ab^2 + b^3$, & alterum à termino $2b^2a$; ita ut ultimum productum ex termino $a^3 + a^2b$ cum ultimo producto ex termino $ab^2 + b^3$ additum, ſubductum, multiplicatum, diviſum, & ex facto radice aliqua extracta (haſce analyticas operationes aliquo modo mutando, reiterando vel utrumque vel neutrum faciendo) eandem efficiat quantitatem quam efficit ultimum productum ex termino $ba^2 + b^2a$ cum ultimo producto ex termino $2b^2a$ eodem omnino modo additum, ſubductum, multiplicatum, diviſum, & ex facto eadem etiam radice extracta, haſce analyticas operationes eodem omnino modo mutando, reiterando vel utrumque vel neutrum faciendo; ſed poſterius eſt abſurdum ergò & prius: ſequela majoris patet ex octava definitione hujus, minorem ſic probo, in termino $a^3 + a^2b$ reperitur poteſtas ipſius a nempe a^3, quæ eſt altior ulla poteſtate ejusdem a in termino $ba^2 + b^2a$; & proinde terminos $a^3 + a^2b$, $ba^2 + b^2a$, cum æqua-

æqualibus quantitatibus addendo, ſubtrahendo, multiplicando, dividendo, &c: ſicut ſuperius dictum eſt, ſemper manet poteſtas ipſius a in ultimo producto ex termino $a^3 + a^2 b$ altior poteſtate ulla ipſius a in ultimo producto termini $ba^2 + b^2 a$, quoniam illos cum æqualibus quantitatibus addendo, ſubſtrahendo, &c, ſemper manent in factis eædem poteſtates, & illos in ſe eodem modo multiplicando ſemper magis elevatur altior poteſtas in termino $a^3 + a^2 b$ quam elevatur depreſſior poteſtas in termino $ba^2 + b^2 a$, & ex illis eaſdem radices extrahendo, ubi a fuerat elevatior in poteſtate erit etiam elevatior in radice: & quoniam eadem reperitur altiſſima poteſtas ipſius a in termino $ab^2 + b^3$ quæ reperitur in termino $2b^2 a$, demonſtratur ut antè altiſſimam poteſtatem ipſius a in ultimo producto ex termino $ab^2 + b^3$ eandem eſſe cum altiſſima poteſtate ipſius a in ultimo producto ex termino $2b^2 a$: in ultimo igitur producto termini $a^3 + a^2 b$ reperitur altior poteſtas ipſius a quam in ultimo producto termini $ba^2 + b^2 a$, & in ultimo producto termini $ab^2 + b^3$ altiſſima poteſtas ipſius a eadem eſt cum altiſſima poteſtate ipſius a in ultimo producto termini $2b^2 a$; & igitur ultima producta ex terminis $a^3 + a^2 b$, $ab^2 + b^3$, eodem modo inter ſe addita, ſubducta, multiplicata, diviſa, &c. ſemper efficient quantitatem, in qua reperitur altior poteſtas ipſius a quam ulla quæ reperiri poteſt in quantitate facta ex eadem prorſus additione, ſubductione, multiplicatione, diviſione, &c, productorum à terminis $ba^2 + b^2 a$, $2b^2 a$; quoniam altior poteſtas cum altera poteſtate ſemper altiorem facit poteſtatem quam depreſſior poteſtas cum eadem altera poteſtate; & igitur iſtæ duæ quantitates non poſſunt eſſe indefinitè æquales, cum reperiatur altior poteſtas ipſius a in una quam in altera: atque hinc evidens eſt quod ſector circuli, ellipſeos vel hyperbolæ ABIP non poſſit componi analyticè à triangulo ABP & trapezio ABFP, quod demonſtrandum erat.

Ut autem evidentius fiat propoſitum, aliam demonſtrationem breviorem faciliorem & ex alio medio petitam hic ſubjun-

jungo: quantitas non poteſt componi analyticè ex terminis $a^3 + a^2 b$, $ab^2 + b^3$, eodem modo quo componitur eadem quantitas ex terminis $ba^2 + b^2 a$, $2b^2 a$; quoniam addendo, ſubſtrahendo, multiplicando, dividendo duo binomia $a^3 + a^2 b$, $ab^2 + b^3$ & radices ex ultimo facto extrahendo, plura fiunt nomina in ultimo producto, quam ſi eodem modo adderentur, ſubducerentur, multiplicarentur, dividerentur, binomium $ba^2 + b^2 a$ & ſimplex quantitas $2b^2 a$, & eædem quoque radices ex facto extraherentur; & ſi plura ſint nomina in uno producto quam in altero, impoſſibile eſt ut ſint indefinitè æqualia, quod eſt propoſitum, reliqua enim ex priore demonſtratione haberi poſſunt.

SCHOLIUM.

Obſcurum fortaſſis videbitur hoc theorema ob multas inuſitatas in geometria voces quas hic adhibere oportet, & ob multa ſuppoſita lemmata, quæ demonſtrare pigebat, quoniam cuivis analyſtæ vel prima lectione ſunt obvia, ex natura enim operationum analyticarum omnino dependent.

Locus hic requirit ut aliquid dicam de proportione inter triangulum ABP & ſectorem ABIP; quod ut fiat, advertendum eſt veriſſimum philoſophorum axioma, nempe omnem noſtram cognitionem à ſenſu ortum habere: inter proportiones enim, ſola commenſurabilis ſenſu attingitur & perfectè ab humana mente intelligitur; incommenſurabilis enim à mathematicis ſolummodo adhuc contemplatur, quatenus commenſurabilis cujuſdam rationis eſt ſubduplicata, ſubtriplicata, &c. vel ex talium additione, ſubductione, &c. genita: hoc eſt, quantitas quæ quantitati propoſitæ eſt incommenſurabilis ex eo ſolummodo ab humana mente contemplatur, quod ex aliquot quantitatum cognitarum & propoſitæ quantitati commenſurabilium additione, ſubductione, multiplicatione, diviſione & radicum extractione componi poſſit: at ex hactenus demonſtratis manifeſtum eſt ſectorem ABIP non poſſe componi ex additione, ſubductione, multiplicatione,

tione, divisione, & radicum extractione trianguli A B P & trapezii A B F P: triangulum autem A B P & trapezium A B F P supponimus esse quantitates inter se analyticas; & proinde sector A B I P illis analytica esse non potest, hoc est ex quantitatum ipsis A B P, A B F P analyticarum additione, subductione, multiplicatione, divisione & radicum extractione componi non potest; & proinde ex hoc capite nulla potest exhiberi ratio inter triangulum A B P & sectorem A B I P, cum evidens sit illam non esse analyticam. sed dicet fortè aliquis rationem inter triangulum A B P & sectorem A B I P omnifariam variari posse; & proinde posse esse inter se in ratione qualibet data sive analytica sive etiam commensurabili: respondeo hoc esse verissimum, sed in hoc casu ratio inter triangulum A B P & trapezium A B F P non erit analytica; & proinde ex dato circulo ellipse vel hyperbola nunquam dabitur in analyticis triangulum A B P, quod ex prædictis clarissimè patet. etiamsi ex prædicto capite non possimus comprehendere rationem inter triangulum A B P & sectorem ABIP, possumus tamen ejus aliquam habere cognitionem, ex eo quod sector A B I P sit terminatio seriei convergentis datæ; & ex hac consideratione possibile est invenire quantitatem datæ commensurabilem cujus differentia à sectore A B I P minor fuerit quacunque quantitate proposita, ad hoc enim semper recurrendum est, cum de quantitatibus quibuscunque incommensurabilibus tractant practici, & in hac nostra approximatione praxis non erit operosior quam in multis aliis etiam quantitatum analyticarum approximationibus, immo multo brevior, facilior & paratior erit illis Vietæ sectionibus angularibus, quæ tamen summæ matheseos utilitati in praxem reducuntur. non video ergo quare circuli quadratura diutius æstimetur ignorari: cum enim demonstratum sit rationem circuli ad diametri quadratum non esse analyticam, vanum certè erit & ineptum illam sicut talem imposterum quærere: at rejectis quantitatibus analyticis, vix credo ullam posse esse notiorem hisce nostrarum serierum convergentium terminationibus, sicut ex sequentibus plenissimè apparebit.

PROP.

PROP. XII. THEOREMA.

TAB. XLIII. Fig. 1. 2. 3.

Sit trapezium ABIP, A; polygonum ABEIOP, C; polygonum ABCG KNP, D; & polygonum ABDLP, B. dico D esse medium harmonicum inter C & B. ex hujus 4, A:C:: C:B, & componendo A † C:C:: C † B:B, sed ex hujus 5, A † C:C:: 2 C:D; & ideo C † B:B:: 2 C:D, & permutando B † C: 2 C:: B:D, & dividendo, differentia inter B & C est ad 2 C, ut differentia inter B & D ad D, & permutando differentia inter B & C est ad differentiam inter B & D ut 2 C ad D, hoc est, ut C † B ad B, & dividendo, differentia inter D & C est ad differentiam inter B & D ut C ad B; & proinde D est medium harmonicum inter C & B, quod demonstrare oportuit.

A C D B

Hæc propositio eodem modo locum habet in omnibus polygonis complicatis, ut patet ex scholio 5 hujus.

PROP. XIII. THEOREMA.

Inter duas quantitates A, B, sit media arithmetica C, media geometrica D & media harmonica E. dico C, D, E, esse continuè proportionales. quoniam A, E, B, sunt in ratione harmonica; erit differentia inter A & E ad differentiam inter E & B ut A ad B; & componendo erit differentia inter A & B ad differentiam inter E & B, ut A † B ad B; deinde permutando & componendo 2 A: A † B:: E:B, sed 2 A est duplum ipsius A & A † B duplum ipsius C, & ideo A:C:: E:B; & proinde CE = AB, & AB = DD, ideoque CE = DD; & igitur C:D:: D:E, quod demonstrare oportuit.

A B

C D E

PROP.

PROP. XIV. THEOREMA.

Sint duo polygona complicata A, B, nempe A intra circuli vel ellipseos sectorem & B extra: continuetur series convergens horum polygonorum complicatorum secundum nostram methodum subduplam descriptorum, ita ut polygona intra circulum sint A, C, E, &c, & extra circulum B, D, F, &c; dico A † E minorem esse quam 2 C: ex prædictis manifestæ sunt sequentes analogiæ; prima quoniam A, C, B, sunt continue proportionales; & secunda quoniam C, D, B, sunt harmonice proportionales: & proinde excessus C supra A, hoc est C -- A, est ad excessum D supra C seu D -- C in ratione composita ex proportione A ad C & ex proportione A † C ad A, hoc est in ratione A † C ad C; at A † C est major quam C, & ideo excessus C supra A est major quam excessus D supra C, est autem D major quam E, & proinde excessus C supra A multò major est quam excessus E supra C; est igitur A † E minor quam 2 C; quod demonstrare oportuit.

A	B
C	D
E	F

C -- A : B -- C :: A : C

B -- C : D -- C :: A † C : A

PROP. XV. THEOREMA.

Iisdem positis: dico excessum C supra A minorem esse quadruplo excessus E supra C. ex prædictis manifestæ sunt sequentes tres analogiæ, prima quoniam A, C, B, sunt continuè proportionales; secunda, quoniam C, D, B, sunt harmonicè proportionales; & tertia, quoniam C, E, D, sunt continuè proportionales; & ideo excessus C supra A (hoc est C -- A est ad excessum E supra C seu E -- C, ut AC † EC † AE † CC ad CC; at B ma-

C -- A : B -- C :: A : C

B -- C : D -- C :: A † C : A

D -- C : E -- C :: E † C : C

jor eſt quam E, & ideo AB ſeu CC major eſt quam AE, & igitur AE † CC minor eſt quam 2 CC: atque AC † EC eſt ad 2 CC ut A † E ad 2 C, ſed A † E minor eſt quam 2 C; & ideo AC † EC minor eſt quam 2 CC; proinde AC † EC † AE † CC minor eſt quam 4 CC; & igitur C — A minor eſt quadruplo ipſius E — C, quod demonſtrare oportuit.

PROP. XVI. THEOREMA.

Sint duo Polygona complicata A, B; nempe A extra hyperbolæ ſectorem & B intra: Continuetur ſeries convergens horum polygonorum complicatorum ſecundum noſtram methodum

A	B
C	D
E	F

ſubduplam deſcriptorum, ita ut polygona extra hyperbolem ſint A, C, E, &c. & intra hyperbolem B, D, F &c; Dico A † E majorem eſſe quam 2 C. ex prædictis manifeſtæ ſunt ſequentes duæ Analogiæ, prima quoniam A, C, B, ſunt continue proportionales; & ſecunda, quoniam C, D, B, ſunt harmonicè proportionales; &

A — C : C — B : : A : C
C — B : C — D : : A † C : A

proinde exceſſus A ſupra C, hoc eſt A — C, eſt ad exceſſum C ſupra D ſeu C — D; In ratione compoſita ex proportione A ad C & ex proportione A † C ad A hoc eſt in ratione A † C ad C, at A † C eſt major quam C & ideo exceſſus A ſupra C eſt major exceſſu C ſupra D, eſt autem E major quam D; & proinde exceſſus A ſupra C multo major eſt exceſſu C ſupra E; manifeſtum eſt igitur A † E majorem eſſe quam 2 C, quod demonſtrare oportuit.

PROP.

PROP. XVII. THEOREMA.

Isdem positis: dico excessum A supra C majorem esse quadruplo excessus C supra E. ex prædictis manifestæ sunt sequentes tres analogiæ; prima, quoniam A, C, B, sunt continuè proportionales; secunda, quoniam C, D, B, sunt harmonicè proportionales; & tertia, quoniam C, E, D, sunt continuè proportionales; & ideo excessus A supra C, hoc est A − C, est ad excessum C supra E, hoc est C − E in ratione composita ex proportionibus

A ad C, A + C ad A & E + C ad C;	A − C : C − B : : A : C
& ideo A − C est ad C − E,	C − B : C − D : : A + : CA
ut A C + E C + A E + C C ad	C − D : C − E : : E + C : C
CC; at B minor est quam E,	

& ideo A B, seu CC minor est quam A E; & igitur A E + CC major est quam 2 CC. atque A C + E C est ad 2 CC ut A + E ad 2 C; sed A + E major est quam duo C, & ideo A C + E C major est quam 2 CC; & proinde A C + E C + A E + C C major est quam 4 CC; & igitur A − C major est quadruplo ipsius C − E, quod demonstrare oportuit.

PROP. XVIII. THEOREMA.

Sint duæ quantitates inæquales; A minor, B major, C media geometrica, D media arithmetica. dico D majorem esse quam C, quoniam B, C, A, sunt continuè proportionales; erit dividendo, permutando, & componendo; ut excessus B supra A ad excessum C supra A, ita A + C ad A, atque A + C major est duplo ipsius A; & proinde excessus B supra A major est duplo excessus C supra; sed excessus B supra A duplus est excessus D supra A, & ideo excessus D supra A major est excessu C

	E	
A	C	B
	D	

ſupra A; eſt igitur D major quam C, quod demonſtrare oportuit.

PROP. XIX. THEOREMA.

Isdem poſitis; ſit inter A & B media harmonica E. dico C majorem eſſe quam E. ex hujus 13, D eſt ad C ut C ad E, ſed D major eſt quam C; & ideo C major eſt quam E, quod demonſtrare oportuit.

CONSECTARIUM.

Ex duabus præcedentibus manifeſtum eſt D majorem eſſe quam E, hoc eſt mediam arithmeticam inter duas quantitates inæquales majorem eſſe media harmonica inter eaſdem.

PROP. XX. THEOREMA.

Sint duo polygona complicata A, B, nempe A intra circuli vel ellipſeos ſectorem, B extra. continuetur ſeries convergens horum polygonorum complicatorum ſecundum methodum noſtram ſubduplam deſcriptorum;

A	B	A
C	D	C
E	F	G
K	L	H
Z		X

ita ut polygona intra circulum ſint A, C, E, K, &c, & extra circulum B, D, F, L, &c; ſitque ſeriei convergentis terminatio ſeu circuli vel ellipſeos ſector Z. dico Z majorem eſſe quam C una cum triente exceſſus C ſupra A. ſit exceſſus G ſupra C quarta pars exceſſus C ſupra A, & exceſſus H ſupra G quarta pars exceſſus G ſupra C; continueturque hæc ſeries in infinitum, ut ejus terminatio ſit X. Exceſſus C ſupra A minor eſt quadruplo exceſſus E ſupra C; & ideo exceſſus E ſupra C major eſt exceſſu G ſupra C, eſt ergo E major quam G. deinde exceſſus E ſupra C minor eſt quadruplo exceſſus K ſupra E, & ideo exceſſus G ſupra C multo minor eſt quadruplo exceſſus K ſupra E, eſt igitur exceſ-

cessus K supra E major excessu H supra G; cumque E major sit quam G, manifestum est K majorem esse quam H: eodem prorsus modo demonstratur in omni serierum A, C, E; A, C, G, continuatione, terminum quemcunque seriei A, C, E, majorem esse quam idem numero terminus seriei A, C, G; & ideo terminatio seriei A, C, E, nempe Z major erit terminatione seriei A, C, G, nempe X, at ex Archimedis quadratura parabolæ constat X æqualem esse ipsi C una cum triente excessus C supra A, & proinde Z eadem major est, quod demonstrare oportuit.

PROP. XXI. THEOREMA.

A B	A B
C D	G H
E F	M N
K L	O P
Z	X

Isdem positis quæ supra; dico Z seu sectorem circuli vel ellipseos minorem esse quam major duarum mediarum continuè proportionalium arithmeticè inter A & B. inter A & B sit media Arithmetica G, & inter G & B sit media Arithmetica H; item inter G & H sit media Arithmetica M, & inter M & H sed media Arithmetica N; continueturque hæc series convergens A B, G H, M N, O P, in infinitum, ut fiat ejus terminatio X. satis patet ex prædictis G majorem esse quam C, atque H media Arithmetica inter G & B major est media harmonica inter easdem G, B; media autem harmonica inter G & B major est quam D media harmonica inter C & B, quoniam G major est quam C; & ideo media Arithmetica inter G & B, hoc est H, major est quam D media harmonica inter C & B. eodem modo M media arithmetica inter G & H major est media geometrica inter easdem G & H: & quoniam G est major quam C, & H quam D; media geometrica inter G & H major est quam E media geometrica inter C & D; & proinde M major est quam E. deinde N media arithmetica inter M & H major est media harmonica inter easdem, & quoniam H major est quam D & M quam E, media harmonica inter M & H major est quam F media harmonica inter E & D; & ideo N

eadem F major eſt. eadem modo utramque ſeriem in infinitum continuando, ſemper demonſtratur terminum quemlibet ſeriei A B, C D, minorem eſſe quam idem numero terminus ſeriei. A B, G H; & igitur terminatio ſeriei A B, C D, nempe Z minor erit terminatione ſeriei A B, G H, nempe X; atque ex hujus 7, terminatio ſeriei A B, G H, ſeu X æqualis eſt majori duarum mediarum arithmeticè continuè proportionalium inter A & B, & ideo Z eadem minor eſt, quod demonſtrandum erat.

PROP. XXII. THEOREMA.

Iisdem poſitis quæ ſupra; dico Z ſeu ſectorem circuli vel ellipſeos minorem eſſe quam major duarum mediarum geometricè continuè proportionalium inter A & B. inter A & B ſit media geometrica G, & inter G & B ſit media geometrica H; Item

A B	A B
C D	G H
E F	M N
K L	O P
Z	X

inter G & H media Geometrica M, & inter M & H media Geometrica N; continuetúrque hæc ſeries convergens A B, G H, M N, O P, &c, in infinitum, ut fiat ejus terminatio X. ſatis patet ex prædictis C & G eſſe inter ſe æquales, item H majorem eſſe quam D; atque ob hanc rationem M media Geometrica inter G & H major eſt quam E media geometrica inter G & D. deinde N media Geometrica inter M & H major eſt media harmonica inter eaſdem; & quoniam M major eſt quam E & H major quam D, erit media harmonica inter M & H major quam F media harmonica inter E & D; & ideo N media Geometrica inter M & H major erit quam F. eadem methodo utramque ſeriem in infinitum continuando ſemper demonſtratur terminum quemlibet ſeriei A B, C D, minorem eſſe quam idem numero terminus ſeriei A B, G H; & igitur terminatio ſeriei A B, C D, nempe Z minor erit terminatione ſeriei A B, G H, nempè X; atque ex hujus 9 terminatio ſeriei A B, G H, ſeu X, æqualis eſt majori duarum mediarum Geometricè continuè proportionalium inter A & B; & ideo Z eadem minor eſt, quod demonſtrare oportuit. SCHO.

SCHOLIUM.

NOn opus eſt ut hic demonſtrem majorem duarum mediarum arithmeticè continuè proportionalium inter duas inæquales quantitates majorem eſſe quam major duarum mediarum Geometricè continuè proportionalium inter eaſdem, & igitur hujus propoſitionis approximationem præcedentis eſſe exactiorem, quod etſi fiat; præcedente tamen ob facilitatem potius utimur.

PROP. XXIII. THEOREMA.

Sint duo polygona cõmplicata A, B, nempè A extra hyperbolæ ſectorem, B intra. continuetur ſeries convergens horum polygonorum complicatorum ſecundum methodum noſtram ſubduplam deſcriptorum, ita ut polygona extra

A	B	A
C	D	C
E	F	G
K	L	H
Z		X

hyperbolam ſint A, C, E, K, &c. & intra hyperbolam B, D, F, L, &c; Sitque ſeriei convergentis terminatio ſeu hyperbolæ ſector Z. dico Z majorem eſſe quam C dempto triente exceſſus A ſupra C. ſit exceſſus C ſupra G quarta pars exceſſus A ſupra C, & exceſſus G ſupra H quarta pars exceſſus C ſupra G, continueturque hæc ſeries in infinitum ut ejus terminatio ſit X. exceſſus A ſupra C major eſt quadruplo exceſſus C ſupra E, & ideo exceſſus C ſupra E minor eſt exceſſu C ſupra G, eſt ergo E major quam G. Deinde exceſſus C ſupra E major eſt quadruplo exceſſus E ſupra K, & ideo exceſſus C ſupra G multò major eſt quadruplo exceſſu E ſupra K, & igitur exceſſus G ſupra H major eſt exceſſu E ſupra K; cumque E major ſit quam G, manifeſtum eſt K etiam majorem eſſe quam H: eodem prorſus modo demonſtratur in omni ſerierum A, C, E, K; A, C, G, H, continuatione, terminum quemcumque ſeriei A, C, E, majorem eſſe quam idem numero terminus ſeriei A, C,

C, G; & ideo terminatio feriei A, C, E, nempe Z, major erit terminatione feriei A, C, G, nempè X; at ex Archimedis quadratura parabolæ conftat X æqualem effe ipfi C dempto triente exceffus A fupra C, & proinde Z eadem major eft, quod demonftrare oportuit.

PROP. XXIV. THEOREMA.

Iisdem pofitis; dico Z feu fectorem hyperbolæ minorem effe quam minor duarum mediarum arithmeticè continuè proportionalium inter A & B. Inter A & B fit media arithmetica G, & inter G & B fit media Arithmetica H, Item inter G & H fit media Arithmetica M, & inter M & H fit media Arithmetica N: continueturque hæc feries convergens A B, G H, M N, O P, in infinitum, ut fiat ejus terminatio X. fatis patet ex prædictis G majorem effe quam C; atque H media arithmetica inter G & B major eft media harmonica inter eafdem G & B; media autem harmonica inter G & B; major eft media harmonica inter C & B, nempe D, quoniam G major eft quam C; & ideo media Arithmetica inter G & B nempe H major eft quam D media harmonica inter C & B eodem modo M media Arithmetica inter G & H major eft media geometrica inter eafdem G & H; & quoniam G eft major quam C & H quam D, media geometrica inter G & H major eft quam E media geometrica inter C & D; & proinde M major eft quam E. Deinde N media Arithmetica inter M & H major eft media harmonica inter eafdem; & quoniam H major eft quam D & M quam E, media harmonica inter M & H major eft quam F media harmonica inter E & D; & ideo N eadem F major eft. eodem modo utramque feriem in infinitum continuando, femper demonftratur terminum quemlibet feriei A B, C D, minorem effe quam idem numero terminum feriei A B, G H; & igitur terminatio feriei A B, C D, nempe Z, minor erit terminatione feriei A B, G H,

A	B
C	D
E	F
K	L
Z	

A	B
G	H
M	N
O	P
X	

GH, nempe X; atque ex hujus 7 terminatio feriei AB, GH, nempe X, æqualis eſt minori duarum mediarum arithmeticè continuè proportionalium inter A & B, & ideo Z eadem minor eſt, quod demonſtrare oportuit.

PROP. XXV. THEOREMA.

Iisdem poſitis; dico Z ſeu ſectorem hyperbolæ minorem eſſe quam minor duarum mediarum geometricè continuè proportionalium inter A & B. Inter A & B ſit media geometrica G, & inter G & B media geometrica H;

A	B	A	B
C	D	G	H
E	F	M	N
K	L	O	P
Z		X	

Item inter G & H media geometrica M, & inter M & H media geometrica N; continueturque hæc ſeries convergens AB, GH, MN, OP, &c. in infinitum ut fiat ejus terminatio X. ſatis patet ex prædictis C & G eſſe inter ſe æquales, & H majorem eſſe quam D; atque ob hanc rationem M media geometrica inter G & H major eſt quam E media geometrica inter C & D. Deinde N media geometrica inter M & H major eſt media harmonica inter eaſdem; & quoniam M major eſt quam E & H quam D, erit media harmonica inter M & H major quam F media harmonica inter E & D; proinde N media geometrica inter M & H major eritquam F. eadem methodo utramque ſeriem in infinitum continuando, ſemper demonſtratur terminum quemlibet ſeriei AB, CD, minorem eſſe quam idem numero terminus ſeriei AB, GH; & igitur terminatio ſeriei AB, CD, nempe Z minor erit quam terminatio ſeriei AB, GH, nempe X; atque ex hujus 9 terminatio ſeriei AB, GH, ſeu X, æqualis eſt minori duarum mediarum geometricè continuè proportionalium inter A & B; & ideo Z eadem minor eſt, quod demonſtrare oportuit.

Ex dictis manifeſtum eſt hanc approximationem exactiorem eſſe illa, in antecedenti propoſitione, demonſtrata, etiamſi hæc ſit paulò laborioſior. ſed non diſſimulandum eſt duas poſſe eſſe ſeries æquales terminationes habentes, ita

ut ſemper quilibet terminus unius ſeriei ſit major quam idem numero terminus alterius ſeriei; ſed in talibus ſeriebus quò longius producuntur, eò minor eſt eorundem numero terminorum differentia: ſed è contra noſtræ ſeries quò longius producuntur, eò magis differunt iidem numero termini, ſicut facillimè demonſtrari poteſt.

Experientia obſervo differentiam inter ſecundam duarum mediarum arithmetice proportionalium & ſecundam duarum mediarum geometricè proportionalium ſemper eſſe multò majorem differentia inter ſecundam duarum mediarum geometricè proportionalium & ſectorem circuli, ellipſeos vel hyperbolæ; quod notatu dignum exiſtimo, hinc enim colligitur ſectorem differre vix ultra unitatem à ſecunda duarum mediarum arithmeticè continuè proportionalium, quando medium arithmeticum non excedit medium geometricum ultra unitatem, quod ſummopere notandum, nam ex hoc evidens eſt approximationem audacter eſſe adhibendam, quando ita continuatur ſeries ut medietas prima notarum ſit eadem in utroque termino convergente, quod experientia etiam evincit; nunquam enim in hoc caſu differt ſector unitate à ſecunda duarum mediarum arithmeticè continuè proportionalium.

Eſt etiam alia approximatio omnium breviſſima & maximè admiranda, etiamſi mihi non contingat illam demonſtratione geometrica munire; nempe ſi primus notarum triens in utroque termino convergente ſit eadem, ſector circuli, ellipſeos vel hyperbolæ ſemper differt infra unitatem à maximo quatuor arithmeticè continuè proportionalium inter terminos noſtræ approximationis.

PROP. XXVI. THEOREMA.

TAB. XLIII. fig. 4. Sit hyperbola quæcunque CFN cujus centrum A, aſymptota AB, AO; ſitque ejus ſector AFGL cum triangulo circumſcripto AFL: aſymptotorum uni AB parallelæ ducantur rectæ FD, IM; & compleantur parallelogramma FDMK,

FDMK, PLMD. dico triangulum AFL esse medium arithmeticum inter parallelogramma FDMK, PLMD. Gregorius à S. Vincentio in Lib. de Hyperbola demonstrat triangulum AFL esse æquale trapezio DFLM, sed manifestum est trapezium DFLM esse medium arithmeticum inter parallelogramma FDMK, PLMD; & ideo patet propositum.

PROP. XXVII. THEOREMA.

Iisdem positis: ducatur AI rectam FL bifariam dividens in I & hyperbolam intersecans in puncto G, fiatque trapezium sectori circumscriptum AFGL, quod dico esse medium geometricum inter parallellogramma FDMK, PLMD. ex demonstratis Gregorii à S. Vincentio evidens est trapezium AFGL æquale esse rectilineo DFGLM. & quoniam AGI recta secat rectam FL bifariam in I, ex ejusdem Gregorii à S. Vincentio Lib. de hyperbola, manifestum est rectas LM, GH, FD, esse continuè proportionales in eadem ratione cum tribus continuè proportionalibus AD, AH, AM. asymptoto AO per punctum G ducatur parallela recta RGS rectis FD, MK, occurrens in punctis R, S. quoniam rectæ FD, GH, LM, sunt continuè proportionales, erit dividendo & permutando FR ad SL ut GH ad LM: & quoniam rectæ MA, HA, DA, sunt continuè proportionales, erit etiam dividendo & permutando MH ad HD hoc est SG ad GR ut HA ad DA, vel ut GH ad LM; & proinde FR est ad SL ut SG ad GR, cumque anguli FRG, GSL, sint æquales ob parallelas FR, SL, erunt triangula FRG, GLS, æqualia; & proinde parallelogrammum RDMS æquale est rectilineo DFGLM seu trapezio AFGL; sed parallelogrammum RDMS est medium geometricum inter paralelogramma PDML, FDMK, quoniam eandem habentia altitudinem eorum bases nempe LM, SM, KM, sunt continuè proportionales; & ideo trapezium AFGL est medium geo- TAB. XLVIII. fig. 4.

 me-

metricum inter parallelogramma PDML, FDMK, quod demonstrare oportuit.

PROP. XXVIII. THEOREMA.

TAB. XLIII. fig. 4. Iisdem positis ducantur rectæ FE, LE, hyperbolam tangentes in punctis F, L, ut compleatur trapezium AFEL, quod dico esse medium harmonicum inter parallelogramma PDML, FDMK. triangulum AFL, trapezium AFGL, & medium harmonicum inter parallelogramma PDML, FDMK, sunt continuè proportionalia, quoniam triangulum AFL est medium arithmeticum & trapezium AFGL medium geometricum inter eadem parallelogramma, ut patet ex hujus 13; sed triangulum AFL, trapezium AFGL, & trapezium AFEL sunt continuè proportionalia ex hujus 1; & proinde trapezium AFEL est medium harmonicum inter parallelogramma PDML, FDMK, quod demonstrare oportuit.

PROP. XXIX. PROBLEMA.

Dato circulo æquale invenire quadratum.

Sit quadratum circulo circumscriptum 4000000000000000; erit ergo eidem inscriptum 2000000000000000, inter quæ quadrata sit medium geometricum 2828427124746190 octagonum nempe intra circulum: deinde inter octagonum intra circulum & quadratum extra sit medium harmonicum, quod levi labore invenitur dividendo duplum quadrati octagoni intra circulum seu duplum rectanguli à quadratis intra & extra circulum per summam quadrati & octagoni intra; eritque inventum medium harmonicum, octagonum circumscriptum, nempe 3313708498984760. continuetur hæc series convergens polygonorum complicatorum donec prima medietas notarum sit eadem in utroque termino con-

convergente, nimirum uſque ad polygona laterum 16384; inſcriptum enim eſt 3141592576586860 & circumſcriptum 3141592692091258; non conſideratur nota ultima, quoniam in diviſionibus & radicum extractionibus ſemper à vera quantitate paululum aberramus, quod ultimam notam imperfectam plerumque reddit. adhibeatur deinde approximatio in hujus 20 & 21 demonſtrata, & invenientur termini intra quos eſt vera circuli menſura, poſito diametri quadrato 4000000000000000, 3141592653589789 minor circulo & 3141592653589792 eodem major, & proinde non latet circuli menſura, quam invenire oportuit. polygonorum ſeriem hic appono.

	Intra circulum	extra circulum
4	2000000000000000	4000000000000000
8	2828427124746190	3313708498984760
16	3061467458920718	3182597878074527
32	3121445152258051	3151724907429255
64	3136548490545938	3144118385245904
128	3140331156954752	3142223629942456
256	3141277250932772	3141750369168965
512	3141513801144299	3141632080703181
1024	3141572940367090	3141602510256808
2048	3141587725277158	3141595117749588
4096	3141591421543029	3141593269613390
8192	3141592345578073	3141592807595664
16384	3141592576586860	3141592692091258

Circulus intra ſequentes terminos conſiſtit

3141592653589789 3141592653589792

eodem omnino modo reperitur rectilineum æquale cuicunque ſectori circulari vel elliptico ex cognito triangulo inſcripto & trapezio circumſcripto.

PROP. XXX. PROBLEMA.

Ex dato ſinu invenire arcum.

TAB. XLIII. fig. 5. Sit arcus circuli A E deſcriptus ex centro B. hujus arcus datur radius nempe A B & ſinus nempe A D: oportet invenire quam proportionem habet ipſe arcus ad integram circuli circunferentiam. ſit arcus chorda A E & ejus ſemiſſis tangens A C vel C E. ex quadrato radii A B auferatur quadratum ſinus A D & relinquetur quadratum ſinus complementi B D, datur igitur B D; & ideo datur area trianguli rectanguli A B D; datur quoque area trianguli A B E nempe rectangulum ſinus dati A D in ſemiſſem radii B E. deinde fiat ut ſumma triangulorum A B D, A B E, ad triangulum A B E ita duplum trianguli A B E ad trapezium A B E C, ut conſtat ex hujus 5. & ex dato triangulo inſcripto A B E & trapezio circumſcripto A B E C, inveniatur per præcedentem ſector ipſe A B E, qui ad circulum integrum datum quæſitam habet proportionem arcus A E ad totam circumferentiam, quam invenire oportuit.

PROP. XXXI. PROBLEMA.

Ex dato arcu invenire ſinum.

TAB. XLIII. fig. 5. Ex dato arcu manifeſtum eſt dari ſectoris aream; hoc igitur ſectore dato conſideretur ex quot notis arithmeticis conſtet ſinus totus: deinde ſumatur ſectoris dati talis pars aliquota nempe ſector A B E, ut trianguli inſcripti A B E & trapezii circumſcripti A B E C toties multiplicia, quoties ſector datus multiplex eſt ſectoris A B E, concordent in tot notis arithmeticis quot continet radix quadrata ſinus totius; hoc enim facile fieri poteſt ex ſpeculatione tabellæ hujus 29: non enim requiritur in hoc praxis præciſa, nam nihil refert etiamſi in magnis radiis diſcrepantia ſit notarum aliquot. Sectoris cogni-

cogniti A B E, cujus arcus A E etiam innotescit, datur radius B A: sit ejus sinus A D, z; & proinde è dato sinu & radio, dabitur ut in antecedente triangulum sectori inscriptum A B E & eidem trapezium circumscriptum A B E C; atque ipse sector datus, est secunda duarum mediarum arithmeticè continuè proportionalium inter triangulum sibi inscriptum & trapezium circumscriptum; & proinde datur æquatio inter duplum trapezii A B E C unà cum triangulo A B E & triplum sectoris cogniti A B E, cujus resolutio manifestat valorem quantitatis ignotæ z, hoc est sinum A D: at dato arcu A E & ejus sinu, dantur etiam ex vulgata sectionum angularium doctrina sinus omnium multiplicium ejusdem arcus A E; & proinde non latet sinus arcus in initio propositi, cum sit ad arcum A E in data ratione multiplici, quem invenire oportuit.

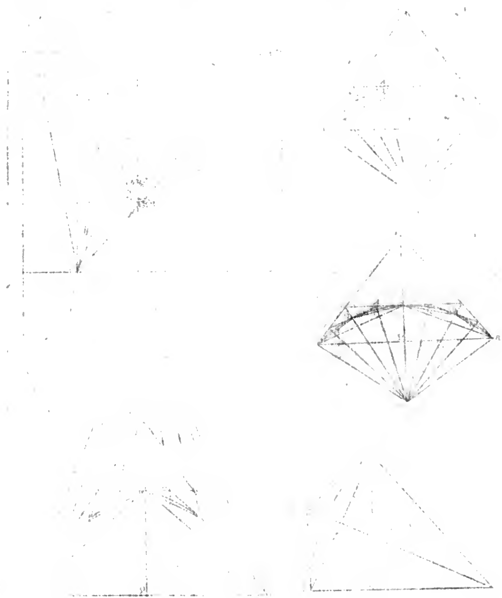
PROP. XXXII. PROBLEMA.

Invenire quadratum æquale spatio hyperbolico contento à curva hyperbolica, uno asymptoto & duabus rectis alteri asymptoto parallelis; quod spatium æquale est sectori hyperbolico cujus basis est eadem curva.

Sit hyperbola D I L, cujus asymptota A O, A K, sibi occurrunt in angulo recto O A K. proponitur hujus hyperbolæ spatium I L M K, contentum à curva hyperbolica I L, asymptoto K M & duabus rectis I K, L M, alteri asymptoto A O parallelis. oportet è datis rectis I K 10 0000000000, L M 10000000000000, A M 1000000000000, & proinde recta quoque K M 9000000000000, invenire mensuram spatii I L M K. Producantur rectæ I K, O L, & ducatur recta I P, ut compleantur rectangula L N K M, Q I K M; manifestum est rectangulum L N K M esse 90000000000000000000000 & Q I K M 90000000000000000000000 & trapezium. TAB. XLIV. fig 1.

pezium LIKM esse medium arithmeticum inter prædicta rectangula, hoc est 49500000000000000000000000. inveniatur inter rectangula LNKM, QIKM, medium geometricum 28460498941515413987990042 quod erit pentagonum ſpatio hyperbolico LIKM regulariter circumſcriptum. Sitque ut trapezium LIKM unà cum dicto pentagono circumſcripto ad dictum pentagonum, ita duplum dicti pentagoni ad hexagonum ſpatio hyperbolico LIKM regulariter inſcriptum, nempe 20779754131836628160009835; quod hexagonum erit polygonum complicatum cum prædicto pentagono; quæ duo rectilinea efficiant primos ſeriei terminos convergentes: inter quæ ſit medium geometricum cujus quadrati duplum dividatur per idem medium geometricum unà cum majori termino ſeu pentagono circumſcripto; eruntque medium geometricum & quotus, ſecundi termini convergentes: atque ita continuetur ſeries hæc convergens polygonorum complicatorum, donec medietas prima notarum eadem ſit in utroque termino convergente, nempe ad terminum vigeſimum; polygonum enim circumſcriptum eſt 23025850929958961534-173864, & inſcriptum 23025850929931203593181124: adhibeatur deinde approximatio in hujus 23 & 24 demonſtrata, & invenientur termini intra quos conſiſtit vera ſpatii hyperbolici LIKM menſura, nempe 23025850929940456-240178681, minor ſpatio, & 23025850929940456240178704 eodem major, & ideo non latet ſpatii menſura, quam invenire oportuit: totam polygonorum ſeriem hic appono unà cum numero rectarum curvam hyperbolicam ſubtendentium in unoquoque polygono circumſcripto.

Extra



	Extra hyperbolam	Intra hyperbolam
2	28460498941515413987990042	20779754131836628160009835
4	24318761696971474416609403	22410399968461612921314879
8	23345088913234727934949897	22868197570682058351436953
16	23105412906351426185065096	22986193244865462241217428
32	23045725982658962868047234	23015921117139340153267671
64	23030818728479610745741910	23023367512879647736902891
128	23027092819292183214705676	23025230015404383009313933
256	23026161398510805910921810	23025695697539046352276636
512	23025928546847571901068394	23025812121604634087915779
1024	23025870334152518169052273	23025841227841783762272302
2048	23025855780992551911165543	23025848504414868310197241
4096	23025852142703422669729927	23025850323559001769499206
8192	23025851233131119425454390	23025850778345089029496888
16384	23025851005738140519209367	23025850892041614212944994
32768	23025850948889877295901163	23025850920465745719335070
65536	23025850934677811503232115	23025850927571778609090592
131072	23025850931124795055887228	23025850929348286832351848
262144	23025850930236540944102405	23025850929792413888218560
524288	23025850930014477416159412	23025850929903444565218845 0
1048576	23025850929958961534173864	23025850929931203593181124

hyperbolæ ſector intra ſequentes terminos conſiſtit

	23025850929940456240178681	23025850929940456240178704

Poteſt igitur abſque periculo erroris ſumi ſequens numerus pro hyperbolæ ſectore, cujus numeri multiplices uſque ad decem, diviſionis facilitandæ gratia in compoſitione logorithmorum, hic ſubjicimus; in magnis namque diviſionibus præſtat uti repetita diviſoris multiplicium ſubſtractione quam ordinaria diviſione, ut conſtat expertis arithmeticis.

Manifeſtum eſt hoc problema eodem ferè modo poſſe reſolvi, etiamſi aſymptota AO, AK, non ſint conſtituta ad angulum rectum: nos autem ita ſuppoſuimus, ut facilior & paratior eſſet problematis uſus in doctrina logorithmica, quam primò invenit nobiliſſimus noſter Neperus, & quam nos (ni fallor) ad ſummum perfectionis faſtigium nunc elevamus.

1	23025850929940456240178700
2	46051701859880912480357400
3	69077552789821368720536100
4	92103403719761824960714800
5	115129254649702281200893500
6	138155105579642737441072200
7	161180956509583193681250900
8	184206807439523649921429600
9	207232658369464106161608300
10	230258509299404562401787000

PROP. XXXIII. PROBLEMA.

Propoſiti cujuscunque numeri logorithmum invenire.

TAB. XLIV. fig. 1. Eiſdem poſitis quæ in antecedente, manifeſtum eſt, poſita IK unitate, ML eſſe decem: poſita ergo IK unitate ſit GH aſymptoto quoque AO parallela numerus propoſitus cujus deſideratur logorithmus. manifeſtum eſt ex data rectâ GH dari KF, & ex præcedenti dari etiam ſpatium hyperbolicum GIKH, quod ſpatium hyperbolicum dico eſſe logorithmum numeri propoſiti GH, poſito ſpatio hyperbolico LIKM logorithmo numeri denarii: eſt enim (ex Gregorio à S. Vincentio) ſpatium GHKI in eadem ratione ad ſpatium LMKI, in qua ratio GH ad IK eſt multiplicata rationis LM ad IK; ſed ratio GH ad IK eſt multiplicata ratio-

rationis LM ad IK in eadem ratione qua numerus GH eſt multiplicatus numeri LM, quoniam idem eſt conſequens in utraque ratione; & proinde ſpatium GIKH eſt in eadem ratione ad ſpatium LIKM, in qua numerus GH eſt multiplicatus numeri LM; & ideo (quoniam ex hypotheſi ſpatium LIKM eſt logorithmus numeri LM ſeu denarii) erit ſpatium GIKH logorithmus numeri propoſiti GH, quoniam hæc eſt logorithmorum eſſentialis proprietas, ut ſint inter ſe in eadem directa ratione, in qua eorum numeri ſunt unus alterius multiplicati: at ponitur communiter logorithmus numeri denarii ad arbitrium unitas cum numero quodam cyphrarum: ſi igitur fiat, ut ſpatium LIKM ad ſpatium GIKH, ita arbitrarius denarii logorithmus ad alium numerum; erit inventus ille numerus, logorithmus numeri propoſiti GH, quem invenire oportuit.

SCHOLIUM.

PRaxis prædicti problematis prolixa eſt & laborioſa; & proinde, ut abbrevietur labor noſter in compoſitione tabulæ logorithmorum; ſciendum eſt nos ſolummodo laborare in inventione logorithmorum, numerorum primorum; numerorum enim compoſitorum logorithmi ex primorum additione & ſubductione nullo negotio invenientur. ſed ut numerorum primorum logorithmi facilius inveniantur, ordine progrediendum eſt à prioribus ad poſteriores, nempe à 10 cujus logorithmus eſt arbitrarius ad 2 numerum omnium primum, & à 10 & 2 ad 3, item à 10, 2 & 3 ad 7, item à 10, 2, 3 & 7 ad 11, & ſic deinceps. deinde inveniendi ſunt duo numeri compoſiti parum inter ſe differentes, quorum unus compoſitus eſt ex numeris logorithmos cognitos habentibus, & ideo logorithmum datum habens, alter autem numerus compoſitus eſt ex ſolo numero primo (cujus quæritur logorithmus) vel ex illo unà cum aliis numeris logorithmos cognitos habentibus. deinde applicentur hi numeri compoſiti

(qui exempli gratia sint GH, EF) in hyperbola asymptoto OA paralleli; & inveniatur spatium hyperbolicum EGHF per hujus 32, quod breviter, fit quoniam GH, EF, parum inter se differunt. ex suppositione, unius numeri, exempli gratia GH, datur logorithmus, & proinde datur ejus logorithmi ratio ad logorithmum denarii arbitrarium, quæ eadem est (ex hactenus demonstratis) cum ratione spatii hyperbolici GIKH ad spatium hyperbolicum LIKM, datur autem ex hujus 32 spatium LIKM; & ideo innotescit quoque spatium IKHG, cumque detur spatium EGHF, innotescit quoque EIKF; & proinde datur logorithmus numeri compositi EF; cumque ex suppositione dentur logorithmi omnium numerorum numerum EF componentium, excepto numero illo primo cujus logorithmus desideratur, dabitur quoque illius numeri primi logorithmus, quem invenire oportuit. Exempli gratia, propositum sit invenire logorithmum numeri binarii, supposito arbitrario numeri denarii logorithmo, unitate cum 25 cyphris. duo numeri compositi parum inter se differentes sunt 1000 & 1024; numeri 1000 datur logorithmus, nempe triplum spatii 23025850929940456240178700 in antecedente inventi, posito scilicet illo spatio numeri denarii logorithmo arbitrario; numeri 1024 ignoratur logorithmus, est enim compositus ex solo numero primo 2, nempe ejus decies multiplicatus est. applicentur hi numeri compositi in hyperbola, ut dictum est; sitque GH 1000, EF 1024: sed quoniam IK unitas est 1000000000000, erit GH 1000000000000000 & EF 1024000000000000, & per hujus 32 inveniatur spatium EGHF 237165266173160421183067 (seriem convergentem hic appono,

ut lecto-

	Extra hyperbolam	Intra hyperbolam
2	237170824512628449899917	237162487062045867846886
4	237166655750699903737556	237164571388054419219371
8	237165613567087322970403	237165092476425954356426
16	237165353021613523599438	237165222748948181485250
32	237165287885271907848389	237165255317105572320456
64	237165271601188181041012	237165263459146597159038
	hyperbolæ ſector intra ſequentes terminos conſiſtit	
	237165266173160272103220	237165266173160458453029

Sit inter hos terminos maximus quatuor continuè arithmeticè proportionalium 237165266173160421183067; qui proinde erit verus hyperbolæ ſector in notarum numero propoſito, quoniam primus triens notarum idem eſt in utroque termino convergente.

ut lectori compendium patefiat) seu logorithmus numeri $1\frac{24}{1000}$ posito logorithmo denarii arbitrario 23025850929940456-240178700; deinde eodem supposito logorithmo arbitrario denarii, addatur logorithmus numeri 1000, seu triplus logorithmi denarii, logorithmo numeri $1\frac{24}{1000}$, eritque summa logorithmus numeri 1024, cujus pars decima erit logorithmus numeri binarii, pro eodem logorithmo denarii arbitrario, nempe 693147180559945291417917: fiatque ut logorithmus numerii denarii 2302585092994045624017870 ad logorithmum numeri binarii correspondentem 69314718055-9945291417917, ita logorithmus numeri denarii arbitrarius propositus nempe 10000000000000000000000000 ad logorithmum numeri binarii quæsitum 3010299956639811952-405804, quem invenire oportuit: eodem modo invenitur logorithmus ternarii 4771212547196624373502993, &c.

Ut in promptu habeantur numeri illi compositi parum inter se differentes pro unoquoque numero primo, hic tabellam exhibeo pro numeris primis usque ad 100, & unam regulam pro numeris primis inter 100 & 1000 & alteram pro numeris primis supra 1000; quæ omnia ita excogitata sunt, ut verus cujuscunque numeri primi logorithmus inveniri possit correspondens logorithmo arbitrario denarii 100000-00000000000000000000 ex una sola multiplicatione, duabus divisionibus & una radicis quadratæ extractione, ultra inconsiderabiles aliquot operatiunculas.

2	1000 $(^{3})$ 10 1024 $(^{10})$ 2
3	32805 factus ex 5 & 6561 $(^{8})$ 3 32768 $(^{15})$ 2
7	2400 factus ex 3 & 32 $(^{5})$ 2 & 25 $(^{2})$ 5 2401 $(^{4})$ 7
11	9800 factus ex 2, 49 $(^{2})$ 7 & 100 $(^{2})$ 10 9801 factus ex 121 $(^{2})$ 11 & 81 $(^{4})$ 3

13

13 123200 factus ex 7, 11, 25 $^{(2)}$ 5, 64 $^{(6)}$ 2
123201 factus ex 169 $^{(2)}$ 13 & 729 $^{(6)}$ 3

17 2600 factus ex 13, 8 $^{(3)}$ 2 & 25 $^{(2)}$ 5
2601 factus ex 9 $^{(2)}$ 3 & 289 $^{(2)}$ 17

19 28899 factus ex 169 $^{(2)}$ 13, 9 $^{(2)}$ 3 & 19
28900 factus ex 100 $^{(2)}$ 10 & 289 $^{(2)}$ 17

23 25920 factus ex 10, 32 $^{(5)}$ 2 & 81 $^{(4)}$ 3
25921 factus ex 49 $^{(2)}$ 7 & 529 $^{(2)}$ 23

29 613088 factus ex 17, 23, 32 $^{(5)}$ 2, & 49 $^{(2)}$ 7
613089 factus ex 729 $^{(6)}$ 3 & 841 $^{(2)}$ 29

31 116280 factus ex 10, 17, 19, 4 $^{(2)}$ 2, & 9 $^{(2)}$ 3
116281 factus ex 121 $^{(2)}$ 11 & 961 $^{(2)}$ 31

37 165648 factus ex 3, 7, 17, 29, & 16 $^{(4)}$ 2
165649 factus ex 121 $^{(2)}$ 11 & 1369 $^{(2)}$ 37

41 1413720 factus ex 7, 10, 11, 17, 4 $^{(2)}$ 2 & 27 $^{(3)}$ 3
1413721 factus ex 1681 $^{(2)}$ 41 & 841 $^{(2)}$ 29

43 978120 factus ex 10, 11, 13, 19, 4 $^{(2)}$ 2, 9 $^{(2)}$ 3
978121 factus ex 529 $^{(2)}$ 23 & 1849 $^{(2)}$ 43

47 664848 factus ex 7, 13, 32 $^{(5)}$ 2 & 729 $^{(6)}$ 3
664849 factus ex 961 $^{(2)}$ 31 & 2209 $^{(2)}$ 47

53 3059000 factus ex 7, 19, 23, 8, $^{(3)}$ 2, & 125 $^{(3)}$ 5
3059001 factus ex, 9 $^{(2)}$ 3, 121, $^{(2)}$ 11 & 2809 $^{(2)}$ 53

57 5851560 factus ex 3, 5, 13, 31, & 121 $^{(2)}$ 11
5851561 factus ex 1681 $^{(2)}$ 41 & 3481 $^{(2)}$ 59

61 3575880 factus ex 5, 7, 11, 43, 8 $^{(3)}$ 2 & 27 $^{(3)}$ 3
3575881 factus ex 961 $^{(2)}$ 31 & 3721 $^{(2)}$ 61

67 1620528 factus ex 3, 13, 16 $^{(4)}$ 2 & 49 $^{(2)}$ 7
1620529 factus ex 361 $^{(2)}$ 19 & 4489 $^{(2)}$ 67

71 2016399 factus ex 3, 11, 29, 43 & $49\,(^{2})\,7$
2016400 factus ex $16\,(^{4})\,2$, $25\,(^{2})\,5$ & $5041\,(^{2})\,71$

73 5116644 factus ex $4\,(^{2})\,2$, $9\,(^{2})\,3$, $169\,(^{2})\,13$, & $841\,(^{2})\,29$
5116645 factus ex 7, 17, 19, 31, 73

79 5997600 factus ex 17, $32\,(^{5})\,2$, $9\,(^{2})\,3$, $25\,(^{2})\,5$ & $49\,(^{2})\,7$
5997601 factus ex $961\,(^{2})\,31$ & $6241\,(^{2})\,79$

83 1164240 factus ex 5, 11, $49\,(^{2})\,7$, $16\,(^{4})\,2$, $27\,(^{3})\,3$
1164241 factus ex $169\,(^{2})\,13$ & $6889\,(^{2})\,83$

89 2859480 factus ex 5, 47, $8\,(^{3})\,2$, $169\,(^{2})\,13$ & $9\,(^{2})\,3$
2859481 factus ex $361\,(^{2})\,15$ & $7921\,(^{2})\,89$

97 1138488 factus ex 3, 13, 41, 89, & $8\,(^{3})\,2$
1138489 factus ex $121\,(^{2})\,11$ & $9409\,(^{2})\,97$

Pro numeris primis inter 100 & 1000 fit hæc regula: ante numerum primum cujus logorithmus quæritur, sumantur immediatè duo numeri proximi, & post eum numerus immediatè sequens, qui tres numeri cum illo primo sunt quatuor numeri in suo naturali ordine se invicem sequentes; deinde multiplicetur primus numerus in cubum tertii & quartus in cubum secundi, eritque factorum differentia æqualis summæ primi & quarti vel secundi & tertii, ut facile demonstrari potest; istique numeri facti habent ad minimum sex notas primas omnino easdem, & proinde parum inter se differunt; atque omnium horum quatuor numerorum (excepto tertii) logorithmi cognoscuntur ex ipsa progrediendi methodo, & ideo ad nostram abbreviationem sunt idonei. in numeris ultra 1000 non opus est tanto apparatu, quoniam rectangulum numerorum, inter quos immediatè comprehenditur numerus primus cujus quæritur logorithmus, unitate solummodo deficit à quadrato numeri primi; eorumque ideo primæ sex notæ ad minimum sunt eædem; atque primi & tertii dantur logorithmi, & ideo ad nostrum institutum sunt idonei.

PROP.

PROP. XXXIV. PROBLEMA.

Ex dato logorithmo invenire ejus numerum.

Ex demonstratis manifestum est hoc problema idem esse ac si quis proponeret; ex dato spatio hyperbolico, & una recta uni asymptotorum parallela illud comprehendente, alteram invenire idem spatium comprehendentem, & eidem asymptoto parallelam. Consideretur ex quot notis arithmeticis constet logorithmus denarii arbitrarius; & sumatur logorithmi vel spatii dati talis pars aliquota nempe spatium LIKM, ut pentagoni spatio LIKM regulariter circumscripti, & hexagoni eidem regulariter inscripti toties multiplicia, quoties spatium datum multiplex est spatii LIKM, concordent in tot notis arithmeticis, quot continet radix quadrata logorithmi arbitrarii; hoc enim facile fieri potest ex inspectione tabellæ 32 hujus: datur ergo spatii LIKM mensura & recta IK unitas ex suppositione. Sit LM, z; sicut in hujus 32 datur pentagonum spatio LIKM regulariter circumscriptum & hexagonum eidem regulariter inscriptum, inter quæ spatium datum LIKM est secunda duarum mediarum arithmeticè continuè proportionalium; & ideo duplum haxagoni una cum pentagono æquatur triplo spatii, cujus æquationis resolutio manifestat ignotam z seu numerum LM, cujus toties multiplicatus, quoties spatium LIKM est submultiplex spatii vel logorithmi dati, est numerus quæsitus, quem invenire oportuit. TAB. XLIV. fig. 1.

Hoc problema idem est cum hujus 8, sed aliter generalius & methodo plerumque minus operosa hic resolutum.

PROP. XXXV. PROBLEMA.

Rectâ per datum punctum in diametro ductâ, semicirculum in ratione data dividere.

TAB. XLIV. fig. 2. Sit semicirculus ADG, cujus diameter AG, centrum E, punctum in diametro datum B. supponatur factum quod jubetur; sitque recta BD semicirculum dividens in ratione data: quoniam datur semicirculi mensura & ratio in qua dividitur, igitur datur ejus portio nempe DBG. Sit recta BD, z: ex datis rectis BD, BE, ED, innotescunt triangula DEB, DEF, DEG: deinde fit ut DEF una cum DEG ad DEG ità duplum DEG ad trapezium circumscriptum DEGH: & positis primis terminis convergentibus DEG, DEGH continuetur series convergens polygonorum complicatorum, secundum circuli proprietates sæpius repetitas, donec conveniens fuerit approximationem adhibere ita ut exhibeatur sector DEG, qui una cum triangulo DBE æquatur portioni DBG cognitæ, cujus æquationis resolutio manifestat ignotam quantitatem z seu rectam BD: reliqua patent.

Idem problema eodem omnino modo resolvitur in ellipse, hyperbola vel earum sectore dato.

SCHOLIUM.

Si quis prædictorum problematum mechanicam desideret praxim; non difficile erit calculum, approximationem, & æquationis resolutionem secundum vulgatas Geometriæ practicæ regulas quodammodo imitari, multa talia problemata possem hic resolvere ope analysios & nostræ serierum convergentium doctrinæ, quæ antea impossibilia æstimabantur: sed dicet fortè aliquis has resolutiones non esse geometricas; respondeo, si per geometricum intelligatur praxis ope

ope ſolius regulæ & circini peracta, hanc in his non ſolum eſſe impoſſibilem ſed etiam in omnibus problematis quæ ad æquationem quadraticam reduci non poſſunt, ſicut facile demonſtrari poſſet; & ſi per geometricum intelligatur reductio problematis ad æquationem analyticam, omnia hæc problemata ſunt geometrice impoſſibilia, cum ex hic demonſtratis, manifeſtum ſit talem reductionem fieri non poſſe: ſi verò per geometricum intelligatur methodus omnium poſſibilium ſimpliciſſima; invenietur fortaſſe poſt maturam conſiderationem omnia prædicta problemata eſſe geometriciſſimè reſoluta, diligenter animadvertendum totam ſerierum convergentium doctrinam poſſe etiam nullo negotio applicari ſeriebus ſimplicibus. Sit enim ſeries A, B, C, D, E, &c, talis naturæ ut tertius terminus C eodem modo componatur ex primo & ſecundo A, B, quo quartus D componitur ex ſecundo & tertio B, C, & quintus E ex tertio & quarto C, D, & ſic deinceps in infinitum; ſitque differentia antecedentium A, B, major ſemper differentia immediatè ſequentium B, C; ſupponamus hanc ſeriem ita in infinitum continuari donec duorum terminorum immediate ſe invicem ſequentium nulla ſit differentia, ſitque unus ex illis terminis *z*, quem ſeriei terminationem appellamus: dico *z* eodem modo componi ex A & B quo ex B & C vel C & D; demonſtratio vix differt ab hujus 10 & ejus conſectario: hac ratione ſi ponatur triangulum, ſectori circulari vel elliptico inſcriptum, vel ſectori hyperbolico circumſcriptum a, & trapezium, ſectori circulari vel elliptico regulariter inſcriptum vel hyperbolico regulariter circumſcriptum b; erit hexagonum ſectori circulari vel elliptico regulariter inſcriptum vel hyperbolico regulariter circumſcriptum $Vq\,\frac{2\,b;}{a+b;}$ & proinde ſector circuli, ellipſeos vel hyperbolæ eodem modo componitur ex a & b quo ex b & $Vq\,\frac{2\,b;}{a+b;}$ atque hinc etiam demonſtrari poteſt, quod ratio inter ſectorem & ejus triangulum datum non ſit analytica, ſecundum

A
B
C
D
E
z

tenorem hujus 11: possem quoque adhuc alia methodo particulari demonstrare arcum circularem non habere rationem analyticam ad suam chordam datam: sed plura non addo, geometras interim pro scientiæ incremento admonens, me reperisse in quibusdam figuris (quas Cartesius secundi generis appellat) tres focos, seu tria puncta, à quibus ductarum in quodlibet curvæ punctum rectarum summa vel differentia semper est eadem: unde mihi verisimile videtur sicut omnis curvæ primi generis duos habent focos vel reales vel imaginarios, ita omnes secundi generis habere tres, omnes tertii quatuor, & sic in infinitum: quæ certè speculatio scrutatu dignissima est, esset enim admiranda figurarum geometricarum proprietas, & mechanicæ omnium æquationum praxi utilissima.

F I N I S.

H. U-

II.

HUGENII OBSERVATIONES IN LIBRUM JACOBI GREGORII, DE VERA CIRCULI ET HYPERBOLÆ QUADRATURA.

D^{ni} Hugenius rogatus à Societate quæ Parisiis suos habebat conventus (1668) in Bibliotheca Regia, ut vellet hunc librum examinare, societati retulit se multos errores observasse in demonstratione, qua Auctor contendit impossibilitatem quadraturæ Circuli & Hyperboles probare.

I. in 11ª. Propositione, in qua auctor contendit Circuli quadraturam analytice impossibilem demonstrare, hæc habentur *Si terminatio magnitudinum propositarum analytice componatur a primis terminis* $a^3 + a^2b$ & $ab^2 + b^3$, *componetur etiam analyticè & eodem omnino modo a secundis terminis* $ba^2 + bba$ & $2b^2a$. sed licet id verum sit quando terminatio inventa est per Methodum, quam indicat, non potest generalis inde deduci conclusio. nisi ponamus, non posse inveniri, nisi per ejus Methodum, terminationem seriei Magnitudinum, quas appellat *convergentes*, vel si aliâ methodo inveniatur illam etiam per suam methodum inveniri posse quod non demonstravit.

II. Autor immediate post addit, *nullam quantitatem posse*

eodem modo analytice componi e terminis $a^3 + aab$, $abb + b^3$ *quo componitur e terminis* $aab + bba$, $2bba$. Hæc nihilominus invenitur per eandem methodum quam indicat in 7. Propositione. Methodus autem hæc est. Primo quærenda est quantitas perquam si multiplices $a^3 + aab$, & producto addas productum $abb + b^3$ multiplicati per datam quantitatem m, summa æqualis sit summæ duorum aliorum productorum; unius $aab + bba$ multiplicati per eandem quantitatem quæsitam, alterius $2bba$ multiplicati per datam quantitatem m. Ponamus igitur quantitatem illam æqualem z, erit $a^3z + aabz + abbm + b^3m = aabz + bbaz + 2bbam$; & $z = \frac{bbm}{aa+ab}$: Et certum est, sive multiplicetur $\frac{bbm}{aa+ab}$ per $a^3 + aab$ & addatur $abb + b^3$ multiplicatum per m, sive eadem illa quantitas multiplicetur per $aab + bba$ & addatur $2bbam$, semper prodire eandem quantitatem $2abbm + b^3m$, & consequenter ultimam hanc quantitatem componi eodem modo e primis & secundis terminis progressionis convergentis propositæ, quod Autor fieri posse negavit.

III°. Datâ autem hac quantitate $2abbm + bbbm$, si hac utamur ad quærendam terminationem progressionis propositæ, juxta methodum ab auctore indicatam in 7 propositione, & in 10, reperietur $= \frac{3aab^3 + ab^4 + 2a^3bb}{bb + ab + aa}$; & posito $a = 1$ & $b = 2$, illa terminatio, quæ designat in eo casu sectorem circuli continentem $\frac{1}{3}$ totius circuli, erit $= \frac{16}{7}$; & primus terminus progressionis $a^3 + aab$, qui designat $\frac{1}{3}$ trianguli æquilateri inscripti in eodem Circulo, erit æqualis 3; ita ut proportio circuli ad triangulum æquilaterum inscriptum sit ut $\frac{16}{7}$ ad 3, id est 16 ad 7. a vero nihilominus omnes has proportiones aberrare facile patet.

IV°. Si examinemus, cur terminatio aliquando occurrat vera per methodum Autoris, ut in 7 Propositione, interdum verò non; reperiemus id ex eo oriri quod problema 10^{mæ} Pro-

Propositionis non bene sit solutum; Non enim sufficit, ut inveniatur terminatio progressionis convergentis, invenisse quantitatem compositam eodem modo e primis & secundis terminis; nam talis solutio tantum locum habet quando quantitas illa detegitur, non investigatâ quantitate quæ dicitur z in 7 Propositione; vel quum eadem quantitas non componitur ex ulla quantitate quæ datur in terminis progressionis, ut in 7ª. Propositione, ubi $z = \frac{me}{d}$; nam Autor sumendo $z = \frac{mae-mbe}{ad-bd}$ non videtur observasse, divisionem posse fieri per $a-b$.

In exemplo propositionis 10, non quæritur quantitas z. sed z appellatur ipsa terminatio; & in transitu notandum est exemplum illud allatum esse citra propositum nam progressio, cujus primi termini sunt a, b, & secundi & $\sqrt{ab}$, $\frac{aa}{\sqrt{ab}}$ non est progressio convergens, neque habet terminationem, quamvis autor illam inveniat.

Quod attinet ad methodum, quam Autor proposuit ad appropinquandum per numeros ad dimensionem Circuli; Dⁿ Hugenius dixit sibi videri se quid magis accuratum dedisse in libro cui titulus est *de Circuli magnitudine*, edito 1654. Addidit illa, quæ Gregorius habet de dimensione Hyperbolæ & ratione quam habet cum Logarithmis, bona quidem esse sed minime nova membris societatis, cum possint recordari, se ipsis idem jam proposuisse, regulamque ad inveniendos logarithmos, jamdudum actis eorum insertam esse. Se etiam non credere illud novum videri regiæ societati Anglicanæ, cum qua jam ante plures annos communicavit methodum ad invenienda pondera aëris in diversis altitudinibus supra terram, quæ fundamentum in hac ipsâ Hyperbolæ dimensione habet.

Hæc autem est methodus, quam Dⁿ Hugenius proposuit ad inveniendum per logarithmos dimensionem Spatii Hyperbolici contenti inter Curvam & unam ex Asymptotis & duas lineas paralelas ad alteram Asymptoton, data ratione quam in-

inter se habent duæ hæ lineæ. *Si logarithmus differentiæ logarithmorum horum numerorum semper addatur ad 0, 36221, 56868, summa erit logarithmus numeri partium, quas continet Spatium Hyperbolicum, illarum quarum 1.0000000000 continet parallelogrammum Hyperbolæ, id est illud, quod est contentum a duabus lineis ductis ex uno Hyperbolæ puncto, & quarum quævis parallela est uni ex Asymptotis*; Exempli gratia si parallelæ, quæ includunt spatium Hyperbolicum sint inter se ut 36 ad 5 operatio hoc pacto fiet.

1, 5563025008 *Logarithmus* 36.
0, 6989700043 *Logar.* 5.
0, 8573324965. *Differentia.*
9, 9331492856 *Logar. Differentiæ.*
0, 36221 56868 *Logar. qui semper additur.*
10, 2953649724; *Logar. cujus numerus facit contentum in Spatio Hyperbolico, quod hic est* 1.9740810180.

I I I.

DOMINI GREGORII RESPONSUM

AD

ANIMADVERSIONES

DOMINI HUGENII,

IN EJUS LIBRUM, DE VERA CIRCULI ET HYPERBOLÆ QUADRATURA.

AD ea quæ dicit D. *Hugenius* contra meam *Circ.* & *Hyperb. Quadraturam*, ingenuè fateor (cum illa scriberem) me non animadvertisse exemplum in prop. 10. non esse seriem convergentem expe-

perientiam enim feci folummodo de primis & fecundis terminis, non confiderando tertios cum primis coincidere, nam ratiociniis infiftebam, de exemplis parum folicitus. Ut autem appareat in hoc nihil contineri contra noftram Doctrinam, agedum hoc loco 10: *prop.* totidem verbis, fed cum legitimo exemplo repetamus.

PROP. X. PROBLEMA.

Ex data quantitate eodem modo compofita à duobus terminis convergentibus cujufcunque feriei convergentis, quo componitur ex terminis convergentibus ejufdem feriei immediate fequentibus; feriei propofitæ terminationem invenire.

Sit feries convergens, cujus duo termini convergentes quicunque fint a, b, & termini convergentes immediatè fequentes $\frac{2ab}{a+b}$, $\frac{a+b}{2}$, termini priores inter fe multiplicati efficiunt eandem ab, item fequentes inter fe multiplicati efficiunt eandem ab; ex his invenienda fit propofitæ feriei terminatio. Manifeftum eft, quantitatem ab eodem modo fieri à terminis convergentibus a, b, quo à terminis convergentibus immediatè fequentibus $\frac{2ab}{a+b}$, $\frac{a+b}{2}$: & quoniam quantitates a, b, indefinitè ponuntur pro quibuslibet totius feriei terminis convergentibus, evidens eft, duos quofcunque terminos convergentes propofitæ feriei inter fe multiplicatos idem efficere productum, quod faciunt termini immediatè fequentes etiam inter fe multiplicati; cumque duo termini convergentes duos terminos convergentes femper immediatè fequantur, manifeftum eft, duos quofcunque terminos convergentes inter fe multiplicatos idem femper efficere productum, nempe ab; atque ultimi termini convergentes funt æquales, & proinde fit ultimus ille terminus, feu feriei terminatio Z, quæ in fe ipfam multiplicata facit

$Z^2 = ab$; est igitur Z. seu seriei terminatio $r^2 ab$, quam invenire oportuit: & proinde ad inveniendam cujuscunque seriei convergentis terminationem opus est solummodo invenire quantitatem eodem modo compositam ex terminis convergentibus primis, quo componitur eadem quantitas ex terminis convergentibus secundis.

CONSECTARIUM.

Quoniam non refert in Problemate, *sive termini convergentes*, a, b, *sint primi*, *secundi vel tertii*, *&c. manifestum est*, *omnis seriei convergentis terminationem eodem modo esse compositam ex terminis convergentibus primis*, *quo ex secundis*, *tertiis*, *&c.*

Si quis aliud Exemplum desideret, sint primi termini a, b, secundi $r^7 a^5 b^2$, $r^2 ab$, quantitas eodem modo composita &c. est $a^7 b^4$ & seriei terminatio $r^{12} a^7 b^4$: videat *Hugenius*, duo exempla legitima hic adducta inquisitionem *Septimæ* non admittere; ope tamen *prop. decimæ* (supposita tertia illa quantitate) facilè resolvuntur, neque ullo modo consectarium respuunt, quod solummodo esse momenti satis sit indicasse; plura autem exempla desideranti millena afferam.

Ad primam *Hugenii* objectionem quod spectat, miror eum non considerasse præcedens *consectarium*, ubi illa, quæ desiderat, evidenter deduco ex *prop.* 10. At agnoscit hoc verum esse in illis seriebus, quæ ope nostræ methodi terminantur: velim certè ut assignet mihi Nobilissimus Vir seriem aliquam convergentem cum sua terminatione, quæ consectarium nostrum respuat; vel si eam assignare non possit, solidam dubitandi rationem tantum desidero. Ut autem funditus evertatur hæc objectio, sequentem exhibeo demonstrationem Geometricam.

Sit

Sit A. Polygonum regulare ſectori *inſcriptum*. B eidem ſimile *circumſcriptum*; continuetur ſeries convergens polygonorum &c. ut ſit ejus terminatio ſeu circuli ſector Z: ſit X eodem modo compoſita à terminis C, D, quo Z à terminis A, B; dico Z & X eſſe indefinitè æquales; ſi non ſint indefinitè æquales, ſit inter illas indefinita differentia *a*, & continuetur ſeries convergens in terminos convergentes I, K, ita ut eorum differentia ſit minor quam *a*; hoc enim abſque dubio concipi poteſt, etiamſi hic omnes quantitates ſint indefinitæ, quoniam definitis quantitatibus A, B, definitur etiam *a*, ſed adhuc reſtat K-I quantitas indeterminata in infinitum decreſcens. Manifeſtum eſt, *ſectorem* Z eſſe indefinitè minorem quam K, & majorem quam I: item quoniam Z eodem modo componitur ex quantitatibus A, B, quo X. è quantitatibus C, D, & Z indefinitè minor eſt quam K & major quam I, patet ex Proprietatibus ſerierum convergentium, X etiam eſſe indefinitè majorem quàm I, & minorem quàm K (eſt enim revera indefinitè major quàm L & minor quam M) & proinde ſunt quatuor quantitates indefinitæ, quarum maxima & minima ſunt I, K, intermediæ autem Z & X, & ideo differentia extremarum K-I major eſt quàm *a* differentia mediarum, quod eſt abſurdum, ponitur enim minor; quantitates ergò Z & X non ſunt indefinitè inæquales, & ideo ſunt indefinitè æquales, quod demonſtrandum erat. Manifeſtum eſt hanc demonſtrationem eodem modo applicabilem eſſe omni ſeriei convergenti.

A B
C D
E F
G H *a*
I K
L M
Z
X

In objectionibus 2, 3, & 4, contra ſuas ipſius imaginationes argumentatur *Hugenius:* Ego enim ſatis dilucidè affirmo in *Scholio propoſit*. 5. & in *fine prop*. 9. Septimam & nonam propoſitionem eſſe Particularem, unamquamque ſuo caſui; item in *Prop. decima* (quàm ergo pro generali ſubſtituo) evidenter ſuppono, & non quæro, illam quantitatem eo modo compoſitam ex primis, quo ex ſecundis terminis convergentibus; ſatis enim ſcio, talem methodum genera-

lem esse impossibilem. Sed omnium maxime admiror, Clarissimum Virum non animadvertisse in 8. *definitione*, Quantitates C, D, E, compositionem ingredientes, semper esse easdem, nempe definitas & invariabiles, ipsos autem terminos A, B, esse indefinitos & variabiles, nimirum in F, G, & infinitos alios: at quis est qui non videt *Hugenii* $\frac{b^2 m}{a^2 \dagger ba}$ non minus esse indefinitam, quam sunt ipsi termini? Deinde in *Proœmio nostræ Geometriæ partis universalis*, sic dico. *Alii objiciunt contra prop.* 11. *ita: si addatur* a^3 *termino* $a^3 \dagger a^2 b$ & *temino* $ba^2 \dagger b^2 a$, *enervetur vis utriusque demonstrationis. Respondeo*, a^3 *esse quantitatem indefinitam, & alias quantitates indefinitas præter ipsos terminos convergentes compositionem non posse ingredi, quod analystam latere non potest*: Eodem modo respondeo *Hugenio* $\frac{bbm}{a^2 \dagger ab}$ esse quantitatem indefinitam, & ideo compositionem non posse ingredi: Si autem mihi objiciat, in *septima* me credidisse, $\frac{mae - mbe}{ad - bd}$ fuisse quantitatem indefinitam; Respondeo, etiamsi divisio per *a-b* à me satis inconsideratè neglecta sit, apertè tamen constat, me hoc cognovisse, ex diversitate methodorum, quibus utor in septima & decima, quippe illa *particulari*, in qua quantitatem illam quæro, & hac *generali*, in qua illam suppono; nulla enim alia ratio hujus diversitatis excogitari potest; quod etiam ex ipsis *septima & decima* est manifestum, cùm appellem semper terminos convergentes quantitates indefinitas, hoc ipso satis significans, nullas alias quantitates indefinitas calculo inesse.

Semper credidi in rebus scientificis verba ita candidè esse explicanda (si modo possibile sit) ut discursus nullum includat absurdum; at *Hugenius* satis percipit, discursum nihil continere absurdi, modò nulla quantitas indefinita præter ipsos terminos compositionem ingrediatur; judicat tamen absque omni ratione, me contrarium existimasse; libenter enim optarem *Hugenium* assignasse locum, ubi assero, illam inqui-

quiſitionem Septimæ eſſe univerſalem. Dico igitur & declaro me intelligere, nullam quantitatem indefinitam præter ipſos terminos convergentes compoſitionem poſſe ingredi. Atque ita corruunt tres ultimæ *Hugenii* ſive diverſæ objectiones, ſive ejuſdem portiones; neſcio enim, quare in tot partes dividatur.

Præcedentibus perceptis, evidentiſſimum eſt, *Circuli*, *Ellipſeos*, vel *Hyperbolæ* ſectorem eſſe terminationem ſeriei convergentis, cujus primi termini $a^3 + a^2 b$, $ab^2 + b^3$, & ſecundi $ba^2 + b^2 a$, $2b^2 a$ * & proinde Sectorem eodem modo componi ex primis terminis quo ex ſecundis*; atque evidens eſt, nullam dari quantitatem eodem modo analyticè compoſitam ex primis terminis quo ex ſecundis, quoniam primos eodem modo analyticè tractando quo ſecundos, ſemper reſtat altior poteſtas ipſius a in primorum producto, quam in producto ſecundorum; de hoc (ſi non credatur) fiat experientia, & conſtabit non ſolum aſſertionis veritas, ſed etiam ejuſdem demonſtratio; quando autem altior eſt ejuſdem poteſtas in una quantitate quàm in altera, nulla datur indefinita æquatio, de qua hic tantum loquimur, hoc eſt, ut (poſitis a, b, ad libitum,) æqualitas ſemper rite procedat. Atque hæc eſt ſumma non ſolum propoſitionis undecimæ ſed etiam totius noſtræ *Circ.* & *Hyp. Quadraturæ*, ab *Hugenio* adhuc intactæ. Gratias tamen ago nobiliſſimo viro, quod meas qualeſcunque lucubrationes examinare dignatus eſt, hinc enim mihi data eſt occaſio illas fuſius explicandi & confirmandi. Num *Hugeniana* methodus circulum menſurandi mea ſit præciſior, experientiæ relinquo judicandum; quod autem noſtra, *Hyperbolam quadrandi*, illi etiam innotuerat, de hoc nihil habeo quod dicam, niſi quod mihi gratuler, inventa mea ipſo *Hugenio* non æſtimari indigna.

* Schol. 5.
* Conſ. 10.

IV.

EXCERPTA EX LITERIS D^ni. HUGENII DE RESPONSO, QUOD D^nus. GREGORIUS DEDIT AD EXAMEN LIBRI, CUI TITULUS EST, *VERA CIRCULI ET HYPERBOLÆ QUADRATURA.*

In circuli quadraturam inquirentes Geometræ, varia & quidem pulcherrima detexere, ideo ne utili exercitio destituantur adversus Gregorium defendere constitui, quadraturam hanc detegi posse; neque huc usque responsionem hanc distulissem, nisi occasione controversiæ nostræ examen suscepissem exactissimum de proxima Circuli & Hyperboles Quadratura: in quo me interpellarunt sæpe alia impedimenta.

Dico nunc primo; Quod spectat impossibilitatem analyticam quadraturæ illarum figurarum, tantum abesse etiam post supplementum demonstrationum, quod D^nus Gregorius dedit, impossibilitatem hanc bene probatam esse, ut adhuc dum incertum maneat, num Circulus & quadratum diametri ejus sint incommensurabilia, id est an non horum ratio per numeros possit exprimi; quod etiam applicari potest portioni determinatæ Hyperboles & figuræ huic inscriptæ. Quod ut demonstremus sufficit observasse; quod XI ejus Propositio & supplementum nil probent quando in ejus serie convergente determinantur quantitates *a* & *b* per numeros rationales vel surdos; quoniam tunc terminatio etiam poterit esse numerus quidam similis; & contrarium per illam propositionem demonstrari non pote-

terit, quoniam tunc ignotum erit, quomodo terminatio composita sit ex primis & secundis terminis. E. G. Si *a* sit 1 & *b*, 2 quomodo probabitur per XI ejus Propositionem, terminationem non esse $\frac{7}{3}$. Ut ergo concludatur, rationem Circuli ad quadratum diametri ejus non esse analyticam, demonstrari non solum debet, quod sector Circuli non sit analyticus indefinite ad figuram suam inscriptam, licet illa demonstratio non careat suâ pulchritudine, sed quod illud etiam verum sit *in omni casu definito.*

Dico præterea, si quantitates *a* & *b* maneant indeterminatæ, terminationem forte reduci ad æquationem ex iis, quarum radices dari nequeunt; & contrarium probari per XI ejus Propositionem, neque per Supplementum, non poterit, nihilominus si illa terminatio reducta sit ad quandam æquationem ejus naturæ, crederem Quadraturam Geometricè esse inventam per intersectionem quarundam linearum curvarum, quæ in Geometriâ admittuntur.

Non inhærebo in aliis objectionibus, quas proposui; Dicam tantum, has, sicuti locum amplius non habent post correctionem Dn. Gregorii, ita antea firmo fundamento nixas fuisse; quoniam omissa divisione necessariâ per *a*- *b* in tot locis propositionis VII. poterat præsumi illum non novisse talem divisionem esse possibilem, & consequenter illum credidisse, in compositione de qua agitur indefinitas admitti debere quantitates.

Transeo igitur ad comparationem nostrarum methodorum pro dimensione Circuli proxima: Certum est, primas ejus approximationes quarum fundamentum sunt ipsius propositiones XX, & XXI: easdem esse cum iis, quas dedi in tractatu *de Circuli magnitudine*, ubi demonstravi eadem illa Theoremata, scil. si Polygonum in Circulo inscriptum sit *a*; & Polygonum simul circumscriptum sit *d*: contentum Circuli minus esse quam $\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}d$ *, sed majus quam $\frac{4}{3}c - \frac{1}{3}a$ *, posito *c* pro Polygono inscripto quod duplo majorem habeat laterum numerum quam *a* vel *d*. Quidquid hic dico &

* Vide supra pag. 161. pr. VI.

* Vide ibid. prop. V.

& in sequentibus dicam de Circulo debet intelligi pariter de sectore Circuli.

Præter hanc approximationem D. Gregorius aliam proponit in fine suæ XXV Propositionis, quam admirandam dicit, cujus demonstrationem se ignorare fatetur; hæc est, inter duos terminos, statim memoratos $\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}d$ & $\frac{4}{3}c - \frac{1}{3}a$, inventis quatuor mediis quantitatibus in proportione Arithmetica, asserit maximam harum quantitatum adeo Circuli magnitudini vicinam esse, ut, si in numeris, qui designant Polygona similia *a* & *d*, prima notarum triens sit eadem, error ad unitatem non pertingat.

Sed invenio hanc approximationem in Circulo veram non esse licet in Hyperbola locum habeat, &, dum in hac utimur maxima quatuor mediarum Arithmeticarum proportionalium, minimam pro approximatione Circuli adhibendam esse.

Ita minima quatuor mediarum proportionalium inter terminos dictos primæ approximationis erit $\frac{16c + 12d - 3a}{25}$, uti facile est videre per Calculum; & probare possum non solum experientiâ, sed & per demonstrationem quantitatem hanc, positis numeris quorum prima notarum triens eadem est, exprimentibus polygonis *a* & *d*, a vera Circuli magnitudine non aberrare nisi in duabus ultimis notis, & plerumque in omnibus notis & ulterius cum vera magnitudine conincidere, quam tamen semper superat, cum e contrario maxima quatuor Mediarum, qua utitur D[us] Gregorius in Hyperbola deficiat.

Inveni præterea, approximationem hanc pro Circulo non æque accuratam esse, ac est illa quam dedi in Tractatu de *Circuli magnitudine*, juxta quam, quando *a*, *c* & *d* designant eadem Polygona, ac supra, terminus excedens contentum Circuli est $a + \frac{10cc - 10ac}{6c + 9a}$* Neque demonstratio difficilis est, quoniam si neges illum terminum esse minorem ideoque magis exactum

* vide supra p. 383. in fine.

ctum quam præcedentem $\frac{16c+2d-3a}{15}$, sequetur, cubum $c-a$ non fore majorem nihilo, & c non majorem quam a contra hypothesin, uti facile videre est per calculum analyticum, observando quod d sit $= \frac{cc}{a}$.

Possunt etiam a & c sumi pro circumferentiis Polygonorum inscriptorum, quorum unum subduplum laterum habet numerum; Et tum terminus $a + \frac{10cc-10aa}{6c+9a}$ est longitudo circumferentiæ Circuli, aut arcus sectoris parum admodum excedens, ut si notarum triens in a & c sit eadem, error dari non poterit nisi in ultima nota, & sæpius nequidem in quatuor vel quinque notis sequentibus ultra illas quæ dantur in numeris a vel c.

Sed & ut illi, qui contemplationes has negligunt, tamen quid commodi ex nostra controversia capiant, addam hic Geometricam constructionem ex ultimâ approximatione deductam qua invenitur longitudo arcus Circuli dati adeo acurata quam ad usum desideratur.

Sit arcus Circuli, qui non excedat semicircumferentiam ABC, cujus subtensa sit AC; dividat hanc ut & arcum in duas partes æquales linea BD. TAB. XLIV. fig. 1.

Ducta subtensa AB sumantur ejus $\frac{2}{3}$ & ponantur ab A ad E in producta lineâ CD; tum diminuta DE decimâ parte EF, ducatur FB, & tandem ipsi perpendicularis BG. Erit linea AG æqualis arcui AB, vel dupla linea æqualis arcui ABC, quæ tam parum excedet, ut tunc etiam, quum arcus erit æqualis semicircumferentiæ Circuli excessus non sit $\frac{1}{1400}$. longitudinis; sed si tantum sit $\frac{1}{3}$ circumferentiæ, differentia non erit $\frac{1}{13000}$, si autem arcus tantum sit pars quarta circumferentiæ error non erit $\frac{1}{90000}$ longitudinis.

Possem hic addere approximationem & constructionem omnino similem pro quadratura Hyperboles, paulo magis accedentem ad veram quam media Arithmetica D^ni. Gregorii,

rii, de qua superius dixi, sed vererer, ne nimium hoc scriptum producerem, & certus sum præterea, post illa, quæ D[ni]. Mercator nuper feliciter invenit de illa quadratura, & correctionem D[ni]. Wallisii, inventa nostra hac de re parum esse consideranda.

V.

EXCERPTA EX EPISTOLA

D. JACOBI GREGORII,

CONTINENTE QUASDAM EJUS CONSIDERATIONES, SUPER EPISTOLA

D. HUGENII,

IMPRESSA IN VINDICATIONEM EXAMINIS SUI LIBRI, DE VERA CIRCULI ET HYPERBOLÆ QUADRATURA.

Ex duobus argumentis, quibus conatur Nob. D. *Hugenius* doctrinam meam evertere, primo quidem, responsionis fundamentum dedi in *Proœm.* ad *Geometr. partem universalem;* alterum autem provenit solummodo à Prop. 11. non recte, opinor, ab *Hugenio* intellecta, quam tandem admittit post correctiones (ut inquit) à me factas. Ut autem, simul cum resolutione Objectionum, omnem evertam dubitandi rationem, ex admissa *Prop.* 11. in forma probare conabor Syllogistica, Nullam esse rationem analyticam inter Circulum & Diametri Quadratum: Præter Modum quippe & figuram nil deest in hactenus à me publicatis, quin

quin id integrè demonſtretur; quæ interim forma rarò à Geometris exigitur. Dico itaque;

Si daretur ratio Analytica (ſeu ratio notis Analyticis exprimenda) inter Circulum & Diametri Quadratum, tunc Circulus analyticè componeretur ex Quadratis, inſcripto & circumſcripto. Sed poſterius eſt abſurdum E. Sequela Majoris ſic probatur;

Quantitas quæſita & determinata invenitur ex quantitatibus quibuſcunque eam determinantibus, in ea ratione, ſeu relatione, quam habet quantitas determinata ad dictas quantitates determinantes. Sed Quadratum inſcriptum & circumſcriptum Circulum determinat, idemque ex illis Circulus daretur in ea relatione, quam habet ad Diametri Quadratum vel ejus ſemiſſem, h. e. ſi eſſet ratio analytica inter Circulum & diametri Quadratum; Ex dictis quantitatibus determinantibus *analyticè* componeretur Circulus. Ex dictis enim quantitatibus omnia analyticè componi poſſunt, quæ ad ea rationem habent analyticam.

Secundi Syllogiſmi *Minor* eſt evidentiſſima. *Major* autem eſt axioma ab omnibus Geometris tacitè admiſſum.

Minor Syllogiſmi prioris ſic probatur.

Eodem modo componitur Circulus ex Quadrato inſcripto & circumſcripto, quo componitur Quadrans Circuli ex Triangulo inſcripto & Trapezio vel potius Quadrato circumſcripto. Sed ex 11. *Prop.* Quadrans Circuli ſeu ſector non poteſt componi analyticè ex Triangulo inſcripto & Quadrilatero circumſcripto. E.

Major eſt evidens. At poterit fortaſſe diſtingui *Minor*, dicendo; Prop. 11. veram eſſe in Methodo indefinita; ſed poſſe eſſe falſam in methodis Particularibus. At inſto. Omnis methodus indefinita in methodos ſeu caſus Particulares eſt reſolubilis. Sed hæc methodus indefinita, nempe quod ſector ſit terminatio datæ ſerie convergentis, in nullam particulararem reſolvi poteſt. Nulla igitur datur hic methodus particularis. *Major* patet, quia quantitates æquales in ſe mutuò ſunt reſolubiles. *Minorem* ita probo; Si hæc Methodus

indefinita resolvetur in aliquam particularem, resolutio fieret vel ab Analysi *speciosa* vel *numerosa*. Sed neutrum dici potest. E. *Major* patet ex sufficienti enumeratione. *Minor* sic probatur: Non ab Analysi *speciosa*, quoniam hæc Methodus *indefinita* ad eam est irreducibilis, ut patet ex Prop. 11. Non à *Numerosa*, quæ hic est interminabilis, proindeque invariabilis.

In hanc ultimam distinctionem resolvitur 1. objectio *Hugenii.* Velim enim Nobiliss. Virum considerare, omnem plenam Problematis solutionem esse *indefinitam*. Nam Methodi *particulares*, cum sint *infinitæ*, exhiberi omnes nequeunt; neque dirigi possunt à tenore Problematis quippe illis omnibus communi: Ideoque requiritur Methodus *Generalis* seu Indefinita, Particularium directrix. Agnosco utique Methodos Particulares casu sæpe inveniri absque ope Generalis; attamen fatendum est Geometris, nullam esse, nec posse fieri Mothodum Particularem, in quam resolubilis non sit Methodus indefinita. Si igitur Methodus Indefinita omni resolutioni sit impervia (ut in *Prop.* 11. est demonstratum) eodem modo omnes Particulares resolutionem etiam respuent; proindeque tam Definita, quam Indefinita nullam compositionem agnoscit. Talis enim Compositio, qualis Resolutio.

Etiamsi prædicta, meo quidem judicio, adundè sufficiant, ne tamen ullus relinquatur cavillationi locus, 11^{mam} nostram *Prop.* etiam in *Definitis* hic demonstrabimus. Sit ergò B Polygonum intra Circuli sectorem, 2 B Polygonum circumscriptum & priori simile; sufficit enim Polygonorum proportionem definire, ut Theorema definitè demonstretur. Continuetur series convergens ut sit ejus teminatio seu Circuli Sector Z. Dico, Z non posse componi *analyticè* ex Polygonis *definitis* B, 2 B. Si fieri potest, componatur Z Analyticè ex Polygonis Definitis B, 2 B. sintque duæ quantitates Indefinitæ a & x, è quibus componatur m eodem

B	2 B
C	D
E	F
G	H
Z	
a	x

dem modo, quo Z. componitur à quantitatibus B, 2 B; Item eodem modo componatur n ex quantitatibus $\sqrt{ax}$, $\frac{2ax}{a+\sqrt{ax}}$: quantitates m, n, non sunt indefinite æquales ex *prop*. 11. Si igitur inter m & n fingatur æquatio; a manente quantitate indefinita, æquatio inter m & n tot habebit radices seu quantitates, in quas resolvitur x, quot quantitatum, inter se diversas rationes habentium, binarii sunt in rerum natura, quæ vices quantitatum a, x, subire possunt, h. e. quæ eandem quantitatem *Analyticè* ex se ipsis componit eodem modo, quo eandem quantitas componitur ex ipsarum media Geometrica $\sqrt{ax}$, & ex media Harmonica inter dictam mediam Geometricam & x, nempe $\frac{2ax}{a+\sqrt{ax}}$, ita ut compositio sit eodem modo quo Z componitur ex B & 2B. atque ex Consectario *Prop*. 10. omnes quantitatum binarii, rationes quoque diversas inter se habentium, B 2B, CD, EF, GH, &c. in infinitum, possunt supplere vices quantitatum a, x, quoniam Z eodem modo componitur ex B 2B, quo ex CD, EF, vel GH, &c. & proinde æquatio inter m & n radices habet numero infinitas. Sed omnis æquatio habet ad summum tot radices, quot habet dimensiones; & proinde æquatio inter m & n dimensiones habet numero infinitas, quod est absurdum; ideoque Z seu Circuli Sector non potest analyticè componi ex Polygonis definitis B, 2B. quod demonstrandum erat. Hinc manifestum est, Terminationem cujuslibet seriei convergentis, si non possit componi ex terminis convergentibus *indefinitè*, nec posse componi *definitè*; adeoque evanescit simul cum nostra distinctione Objectio *Hugenii* prima.

Idem in Objectione sua secunda non videtur advertisse, me non solum in Prop. 11. sed etiam in toto meo Tractatulo intelligere per Extractionem radicum, Resolutionem omnium potestatum sive purarum sive affectarum; omnium quippe eadem est ratio, neque ulla imaginabilis est in demonstratione diversitas, sive Sector supponatur Radix ali-

cujus poteſtatis puræ, ſive affectæ ad puram irreducibilis. Nam ſi Sector eodem modo fiat ex primis terminis convergentibus, quo ex ſecundis (ut in Conſect. *Prop.* 10. eſt demonſtratum) etiam omnes ejus poteſtates ſive puræ, ſive quocunque modo affectæ eodem modo componitur è primis, quo è ſecundis terminis convergentibus, quæ (in Analyticis exhibitæ) erunt æquales quantitates eodem modo Analyticè compoſitæ ex primis, quo ex ſecundis terminis convergentibus; quod eſt abſurdum, nempe contra *Prop.* 11. admiſſam. Senſus igitur integer *Prop.* 11. eſt Hoc Problema (*E datis duobus polygonis complicatis, invenire Sectorem ſive Circularem ſive Hyperbolicum ab illis determinatum*) non poteſt reduci ad ullam æquationem Analyticam.

In comparatione *Hugeniana* inter noſtras methodos, agnoſco, meas approximationes prop. 20. & 21. eaſdem eſſe cum *Hugenianis*, ſed methodo mihi peculiari demonſtratas. At meam approximationem in fine *prop.* 25. non percipere videtur *Hugenius*; aliam interim ſibi fingit: hanc primò meam non eſſe probat, deinde tamen eam cum ſua comparat, victoriaque potitur. Sed lentè hic feſtinandum.

Sit *a* Polygonum, Circulo vel ſectori inſcriptum, *c* Polygonum inſcriptum duplo plura habens latera, *d* autem ſit Polygonum circumſcriptum ſimile ipſi *c*. Ex 20. *prop.* Sector eſt major quam $\frac{4c-a}{3}$; & ex 21. Sector eſt minor quam $\frac{2d+c}{3}$, inter quos terminos ſit maximus quatuor continuè proportionalium $\frac{8d+8c-a}{15}$, nempe noſtra approximatio; quam rigidiſſimis *Hugenii* cenſuris ſubjicio. Hallucinatur autem *Hugenius*, quod Polygona *a* & *d* ſimilia ſumeret, cum debeant eſſe *c* & *d*, quæ duplò plura habent latera. Ne autem dicat, factam eſſe à me correctionem, conſideret hanc approximationem non ſolum verbis *prop.* 25. ſed & praxi *prop.* 30. eſſe conſonam, ubi approximationem *prop.* 21. ex ultimis ſimilibus Polygonis conſtruo: ridiculum enim eſſet, illam è penultimis minus præciſam dare, cum eadem ope-

opera detur magis præcisa ex ultimis. At miror, cum *Hugenius* incidisset in meam *Hyperbolæ* approximationem, quod eam non potuerit *Circulo* applicare; Nam in Hyperbola absque dubio 24. *prop.* approximationem ex ultimis similibus polygonis construxit: Omnis enim ad *Circulum* approximatio ex polygonis deducta, *Hyperbolæ* est etiam applicabilis, & vice versa. Sed hoc non videtur animadvertisse *Hugenius*; alioqui in fine suarum Animadversionum non promitteret talem Hyperbolicam approximationem, de cujus applicatione ad Circulum nihil dicit. Quæ autem illic affirmat (si de semet loquitur in plurali) transeant; si verò etiam de me adeo fidenter sibi persuadeat, falli ipsum putem, cum hæc eadem quadratura, de qua loquitur, antequam ab eo videretur, ad laboris dimidium à me sit reducta.

Ne autem *Hugenii* praxis geometrica minus peritis videatur nostram superasse, ex nostra approximatione, ab *Hugenio* rejecta, sequentem praxin exhibebo.

In fig. *Hugeniana* sit $AC = A$, $ABC = B$, sitque $A + B : B :: 2B : C$; eritque $\frac{8C + 8B - A}{15}$ major, quam arcus ABC; differentia autem, in semi-circumferentia minor erit quàm ipsius $\frac{1}{3500}$, in triente minor quam ipsius $\frac{1}{40000}$, & in quadrante minor quam ipsius $\frac{1}{300000}$. Sed quoniam præcedens approximatio major est quàm arcus, aliam addamus eodem minorem. Sit $A : B :: B : D$; $\frac{-12C + 4B - D}{15}$ minor erit quam arcus ABC; differentia autem in semi-circumferentia minor erit quam ipsius $\frac{1}{1000}$, & in quadrante minor quam ipsius $\frac{1}{60000}$, inter has approximationes sit maxima, penultima sex continuè Arithmeticè proportionalium, quæ minor erit quàm arcus, differentia autem in semi-circumferentia minor erit quam ejusdem $\frac{1}{19000}$, & in quadrante mi-

TAB. XLIV. fig. 1.

minor quam ejusdem $\frac{1}{1000000}$. Sed hæc levia mihi videntur, cum possim Approximationes exhibere, quæ ab ipsa semi-circumferentia differant minori intervallo, quam quælibet ejus pars assignata, neque nobis amplius apparent hæc mirabilia, cum demonstratio solida innotescat. Ad reliqua ab *Hugenio* publicata, cum à meo instituto sint aliena, nihil dico, nisi quod ipsa Hugenii dicta (non obstante exactissima sua, ut ait, materiæ hujus examinatione) à meæ *Appendiculæ* factis ni fallor, longè superentur. Vale. *Decemb.* 15. 1668.

Figura *Hugenii* hæc est, quam ipse hoc sensu, licet Gallicè, sic explicat. Sit Arcus Circuli, qui non excedat semicircumferentiam, A B C, cujus subtensa sit A C, & dividantur ambo in partes æquales per lineam B D. Ducta subtensa A B, capias inde $\frac{2}{3}$, easque jungas inde ab A ad E in linea C A protracta. Dein, resecta lineæ D E parte decima E F, ducas F B, & tandem B G, ipsi perpendicularem: & habebis lineam A G æqualem Arcui A B C, cujus excessus tantillus erit, ut etiam tunc, quando hic arcus æqualis erit semicircumferentiæ Circuli, futura non sit differentia $\frac{1}{1400}$ suæ longitudinis; at quando non est nisi tertiæ partis circumferentiæ, differentia non erit $\frac{1}{15000}$; & si non sit nisi quartæ partis, non differet nisi $\frac{1}{90000}$, suæ longitudinis.

F I N I S.

CHRIS-

CHRISTIANI HUGENII
GEOMETRICA
VARIA.

I.

CONSTRUCTIO LOCI AD HYPERBOLAM PER ASYMPTOTOS.

In æquatione loci ad hyperbolam, si neutra indeterminatarum linearum in seipsam ducta inveniatur, velut si sit $xy = bb$; vel $xy = cx . bb$; (literis x & y lineas indeterminatas AB, BC significantibus, quæ in dato angulo sibi mutuò sint applicatæ, quarumque altera, ut AB, positione data intelligitur, & in ea datum punctum A) constructio per asymptotorum inventionem facilè absolvitur, ut ostensum est à *Fl. de Beaune* in Notis ad Geometriam Cartesii. Cum verò habetur xx vel yy in æquatione, vel utrumque nihilominus ad asymptotos rem deduci posse, & quidem brevius quàm ad diametri laterumque recti & transversi inventionem, ostendemus hoc modo. TAB. XLIV. fig. 4. 5. 6. 7.

Sit æquatio ejusmodi reducta, $y = l . \frac{nx}{z} \sqrt{mm . ox + \frac{ppxx}{gg}}$; semper enim ad hos terminos reduci potest, nempe ut y altera linearum indeterminatarum, quæ applicata est ad positionem datam, sola ab una parte æquationis habeatur, ab altera verò non plures termini quàm hic inveniantur; nam sæpe pauciores etiam esse possunt, cum soli necessarii sint $+ \frac{ppxx}{gg}$ cum alterutro horum mm vel ox.

Quum angulus ABC datus sit, ducatur per A punctum linea XY quæ sit rectæ BC parallela, & in ea accipiatur AI æqualis l, idque ad partes BC, si habeatur $+ l$ in æquatione, in contrarias verò si habeatur $- l$, & agatur IK pa-

rallela AB. Si verò non habeatur omnino l, recta IK in AB incidere intelligenda est.

Deinde sicut z ad n, quæ ratio data, ita sit IK ad libitum sumpta, ad KL; quæ ipsi AI parallela ducenda est, sumendaque hoc pacto, ut puncta KL sita sint quo ordine AI, si habeatur $+ \frac{nx}{z}$, at contrà si habeatur $- \frac{nx}{z}$, & ducatur recta per IL; si verò desit $\frac{nx}{z}$, eadem est IL & IK.

Porro ut p ad g, ita sit $\frac{1}{2}o$ ad singulas IX, IY sumendas in recta AI; atque ita quoque IX ad IV sumendam in IK ad partes AB si habeatur $- ox$, aut in contrarias si habeatur $+ ox$; & sit VM parallela AI, occurratque rectæ IL in M: erit jam M centrum hyperbolæ quæsitæ; asymptoti vero, rectæ per MX, MY ductæ.

Si vero non habeatur ox in æquatione, erit I centrum hyperbolæ; sumptisque IX, IY ad libitum sed inter se æqualibus, inventisque inde punctis V & M, ut ante, ducentur asymptoti per I parallelæ ipsis MX, MY.

Jam porro si habeatur $+ mm$, puncta S & R, per quæ hyperbola vel oppositæ sectiones transire debent, invenientur sumendo in recta AI à puncto I, singulas IS, IR æquales m: unde jam hyperbola data erit ac describi poterit, in qua BC erit ordinatim applicata ad diametrum, si $\frac{\frac{1}{2}og}{z}$ major quam m; sin verò $\frac{\frac{1}{2}og}{p}$ minor quam m, erit BC parallela diametro hyperbolæ ad quam est C punctum, ut hic casu secundo. Quod si forte punctum S incidat in X, locus puncti C, erunt ipsæ asymptoti. Si verò non habeatur mm, erit ipsum I punctum in hyperbola quæsita.

At si habeatur $- mm$, accommodanda est intra angulum XMI recta GN parallela IX, quæque possit quadrata ab IX & IS, vel tantum ipsi IS æqualis, si non habeatur ox;

ox; eritque punctum N in hyperbola quæſita, quæ proinde rurſus data erit.

Sumpta enim in caſu primo $AB = x$ ad arbitrium, eique applicata $BC = y$ in angulo dato, quæ ad hyperbolam inventam terminetur, oſtendendum ſit quod Fig. 4.

$$y = l - \frac{nx}{z} + \sqrt{mm - ox + \frac{ppxx}{gg}}.$$

DEMONSTRATIO.

OCcurrat B C utrinque ſi opus ſit producta, aſymptotis in O & Q. Ex conſtructione eſt IX vel $IY = \frac{\frac{1}{2}og}{p}$, $IV = \frac{\frac{1}{2}ogg}{pp}$, Ratio verò data IK ad KL, eadem nempe quæ z ad n. Sed & angulus IKL datus eſt. Ergo & ratio IK ad IL, quæ ſit ea quæ z ad a. Ergo quia ut IK ad IL ita IV ad IM, erit $IM = \frac{\frac{1}{2}aogg}{zpp}$. Ut autem IM ad IX, hoc eſt ut $\frac{\frac{1}{2}aogg}{zpp}$ ad $\frac{\frac{1}{2}go}{p}$, ſive ut ag ad pz, ita ML, ſive MI minus IL, hoc eſt, $\frac{\frac{1}{2}aogg}{zpp} - \frac{ax}{z}$ ad LO vel LQ; quæ itaque erit $\frac{\frac{1}{2}og}{p} - \frac{px}{g}$. Porro quia $BK = l$, & $LK = \frac{nx}{z}$, erit $BL = l - \frac{nx}{z}$, quâ ablatâ à $BC = y$, fit $LC = y - l + \frac{nx}{z}$. Propter hyperbolam verò erit rectangulum QCO æquale rectangulo YSX. Sed rectangulum QCO æquale eſt quadrato LO minus quadrato LC, hoc eſt quadrato ab $\frac{\frac{1}{2}go}{p} - \frac{px}{g}$ minus quadrato ab $y - l + \frac{nx}{z}$: quorum quadra-

torum differentia est $\frac{\frac{1}{4}ggoo}{pp} - ox + \frac{ppxx}{gg} - yy + 2ly - ll + \frac{2nxy}{z} + \frac{2lnx}{z} - \frac{nnxx}{zz}$. Ergo hæc æquatur rectangulo YSX, hoc est quadrato IX minus quadrato IS, hoc est $\frac{\frac{1}{4}ggoo}{pp} - mm$; quia IX $= \frac{\frac{1}{2}go}{p}$ & IS $= m$. In qua æquatione deleto utrinque $\frac{\frac{1}{4}ggoo}{pp}$, invenietur $y = l - \frac{nx}{z} + \sqrt{mm - ox + \frac{ppxx}{gg}}$, ut oportebat.

fig. 5. In Secundo casu rectangulum QCO æquatur quadrato LC minus quadrato LO; & rectangulum YSX quadrato IS minus quadrato IX. Unde rursus valor Y idem qui casu primo invenietur.

fig. 6. Sit tertius casus quo habeatur $-mm$, sitque æquatio $y = l - \frac{nx}{z} + \sqrt{-mm + ox + \frac{ppxx}{gg}}$, producta GN occurrat alteri asymptoto in D. Hic jam eadem ratione qua prius, apparebit LO vel LQ esse $\frac{\frac{1}{2}go}{p} + \frac{px}{g}$, & LC $= y + \frac{nx}{z} - l$. Et propter hyperbolam erit rectangulum QCO $=$ rectangulo DNG seu quadrato NG, hoc est $\frac{\frac{1}{4}ggoo}{pp} + mm$, quia XI $= \frac{\frac{1}{2}go}{p}$, & IS $= m$, quorum quadratis æquale fecimus quadratum GN. Rectangulum autem QCO æquatur quadrato LO minus quadrato LC, hoc est $\frac{\frac{1}{4}ggoo}{pp} + ox + \frac{ppxx}{gg} - yy - \frac{2nxy}{z} - \frac{nnxx}{zz} + 2ly + \frac{2nlx}{z} - ll$. Ergo hoc æquale $\frac{\frac{1}{4}ggoo}{pp} + mm$. In qua æquatione deleto rursus utrinque

que $\frac{\frac{1}{4}ggoo}{pp}$, invenitur $y = l - \frac{nx}{z} + \sqrt{-mm + ox + \frac{ppxx}{gg}}$.
Eademque est demonstrandi ratio in casu quarto, & aliis fig. 7. quibusvis, habita ratione signorum + & −.

Cum non habetur $\frac{nx}{z}$ in æquatione, puncta M & V unum sunt, tunc vero si $p = g$, hoc est si habeatur $+ xx$ pro $\frac{ppxx}{gg}$, erunt semper asymptoti sibi mutuò ad angulos rectos, quia ut p ad g, ita fecimus $\frac{1}{2}o$ ad IX & ad IY, & ita IX ad IV; fiunt enim jam æquales IX, IY, IV, & singulæ $= \frac{1}{2}o$, unde punctum V est in semicirculo super XY & proinde angulus XVY rectus. Item quia IM $= \frac{\frac{1}{2}aogg}{zpp}$, patet quod si $ag = zp$, hoc est si g ad p ut z ad a, tunc erit IM $= \frac{\frac{1}{2}og}{p}$, ac proinde æqualis ipsi IX & IY quæ etiam erant $\frac{\frac{1}{2}og}{p}$. Adeoque hoc casu erunt asymptoti sibi mutuo ad angulos rectos; cum rursus punctum M sit futurum in circumferentia circuli descripti super XY centro I.

DE-

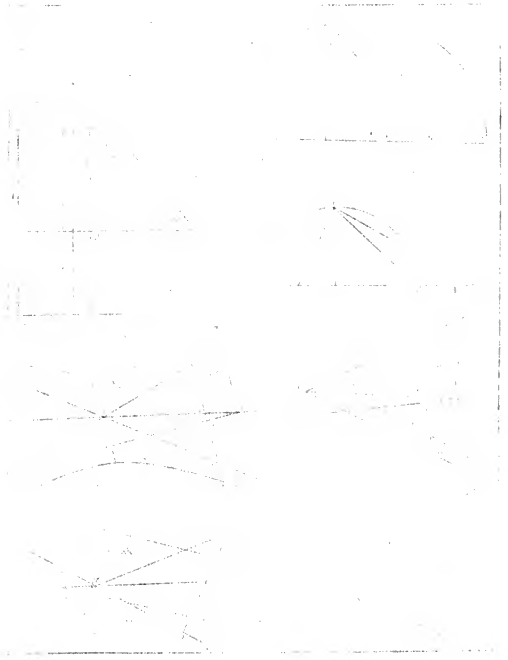
II.

DEMONSTRATIO
REGULÆ
DE
MAXIMIS ET MINIMIS.

Ad investiganda Maxima & Minima in Geometricis quæstionibus, regulam certam primus, quod sciam, Fermatius adhibuit: cujus originem ab ipso non traditam cum exquirerem, inveni simul quo pacto ea ipsa regula ad mirabilem brevitatem perduci posset, utque inde eadem illa existeret quam postea vir amplissimus Joh. Huddenius dederat, tanquam partem regulæ suæ generalioris atque elegantissimæ, quæ ab alio prorsus principio pendet. Hæc à Fr. Schotenio edita est unà cum Cartesianis de Geometria libris. Fermatianæ autem regulæ examen quod institui est hujusmodi.

TAB. XLV. fig. 1. Quoties Maximum aut Minimum in problemate aliquo determinandum proponitur, certum est utrinque æqualitatis casum existere: ut si data sit positione recta E D & puncta A, B, oporteatque invenire in E D punctum C, unde ductis CA, C B, quadrata earum simul sumpta, sint minima quæ esse possint; necesse est ab utraque parte puncti C, esse puncta G & F, à quibus ducendo rectas G A, G B; F A, F B oriatur summa quadratorum G A, G B æqualis summæ quadratorum F A, F B, & utraque summa major quadratis C A, C B simul sumptis.

Ut igitur inveniam punctum C, unde ductis C A, C B fiat summa quadratorum ab ipsis omnium minima; ductis AE, B D perpendicularibus in E D, quarum A E dicatur a; B D, b; intervallum verò E, D, c: fingo primùm G F, differentiam dua-



duarum E G, E F æqualem datæ lineæ quæ vocetur e; & quæro quanta futura sit E G, quam appello x, ut quadrata G A, G B simul sumpta æquentur quadratis F A, F B.

Itaque quia A E $= a$, & E G $= x$, erit quadratum A G $= aa + xx$. Et quia G D $= c - x$, & D B $= b$, erit quadratum G B $= bb + cc - 2cx + xx$, unde quadrata A G, G B simul sumpta fient $= aa + bb + cc - 2cx + 2xx$, qui dicantur termini priores; idque similiter in quovis alio problemate intelligendum, ubi maximum aut minimum inquiritur. Rursus autem quia E F $= x + e$, si ubique in summa quadratorum inventa substituam $x + e$ pro x, & quadratum ab $x + e$ pro xx, adque ita deinceps si altior potestas ipsius x reperiatur, certum est exorituram summam quadratorum F A, F B; quæ quidem erit $aa + bb + cc - 2cx - 2ce + 2xx + 4ex + 2ee$, æquanda summæ quadratorum AG, GB; dicantur autem hi termini posteriores.

Itaque erit $aa + bb + cc - 2cx + 2xx = aa + bb + cc - 2cx - 2ce + 2xx + 4ex + 2ee$. Ex qua æquatione prodibit valor EG sive x, quando G F sive e certæ magnitudinis lineam refert.

Ponendo autem e infinitè parvam, apparebit ex eadem æquatione quanta futura sit E G, cum ipsi E F æqualis est, adeoque habebitur determinatio quæsita puncti C, unde ductæ C A, C B faciant summam quadratorum minimam; nempe sublatis primùm, si quæ sunt, fractionibus, (quæ in hoc exemplo nullæ sunt) deleantur termini qui utrinque iidem habentur, quales sunt necessariò omnes quibus litera e admixta non est; idque facile est intelligere, cum dixerimus posteriores terminos ex prioribus describi, ponendo $x + e$ vel potestatem ejus, quoties invenitur x vel potestas ejus aliqua in prioribus. Deinde omnes termini per e dividuntur, quibusque post eam divisionem adhuc unum e aut plura inesse inveniuntur, ii deleantur, quippe cum quantitates infinitè parvas contineant respectu cæterorum terminorum quibus nullum amplius inest e. Ex quibus denique solis invenitur quantitas x quæsita in casu determina-

tionis proposito; & hæc est ratio methodi Fermatianæ, quâ in compendium redactâ hanc aliam inveni, cujus partes duæ sunt. Nam primò,

„Quando termini, quos maximum aut minimum designa„re volumus, nullam fractionem habent, in cujus deno„minatore quantitas incognita quæsita continetur; multi„plicandus est terminus quisque per numerum dimensionum, „quem in illo habet quantitas incognita, omissis terminis iis „in quibus incognita quantitas non reperitur; omniaque illa „producta æquanda nihilo.

Ita in exemplo proposito, ubi termini priores inventi sunt $aa + bb + cc - 2cx + 2xx$, summam duorum quadratorum continentes, quam volo esse minimam; tantummodo hujusmodi instituenda erit multiplicatio,

$$\frac{aa + bb + cc - 2cx + 2xx}{\quad\quad\quad\quad\quad 1 \quad\quad 2}$$

Ex qua orientur termini æquandi nihilo $- 2cx + 4xx = 0$;

Unde fit $\frac{1}{2}c = x$.

Ita quoque si priores termini sint $3ax^3 - bx^3 - \frac{2bba^2}{2c}x + ab^2$,

multiplicatio erit hujusmodi $\overline{3 \quad\quad 3 \quad\quad\quad\quad 1}$

Unde termini æquandi nihilo $9ax^3 - 3bx^3 - \frac{2bba^2}{3c}x = 0$

$$9axx - 3bxx - \frac{2bba^2}{3c} = 0.$$

Hujus compendii ratio ut intelligatur, sciendum primò, quoniam termini posteriores ex prioribus describuntur, ponendo tantum ubique $x + e$ pro x, necessariò omnes terminos priores etiam in posterioribus reperiri; ideoque illos nihil

nihil opus esse describi, cum utrobique mox delendi forent, atque adeo illos tantum scribendos in quibus unum e vel plura insunt, ut in exemplo nostro $- 2ee + 4ex + 2ee$; eosque æquandos nihilo. Sed etiam illos quibus plura quam unum e inerunt, scribi frustra apparet, cum divisione facta per e delendos postea constet, ut paulò ante diximus. Itaque nulli præterea ab initio describendi inter terminos posteriores quam quibus inerit e simplex.

Hi autem termini ex terminis prioribus facilè deducuntur, cum constet nihil aliud esse quam secundos terminos potestatum ab $x + e$, quia cæteri omnes plura quam unum e vel nullum habent. Adeo ut ubicunque in prioribus terminis habetur x, scribendum sit in posterioribus e; & ubi habetur xx in prioribus, ponendum $2ex$ in posterioribus; & ubi x^3 in prioribus, in posterioribus $3exx$, atque ita deinceps. Dicti autem termini secundi cujusque potestatis $x + e$ ex ipsa potestate x facilè describuntur mutando unum x in e, & præponendo numerum dimensionum ipsius x, ita enim ab xx fit $2ex$, & ab x^3, $3exx$; atque in cæteris pari modo. Itaque ex terminis prioribus in quibus x, quos solos considerandos esse patuit, facilè etiam termini posteriores, ii quos nihilo adæquandos diximus, describuntur; multiplicando tantum singulos in numerum dimensionum quas in ipsis habet x. Nam mutare unum x in e ne quidem opus est, cum eodem redeat, sive omnes postea per e sive per x dividantur, & ex his quidem aperta est ratio compendii ad primam partem regulæ pertinentis: nunc ad alteram veniamus quæ est hujusmodi.

„Si termini quos maximum aut minimum designare volu„mus fractiones habeant in quarum denominatore occurrat „quantitas incognita, delendæ primùm sunt quantitates co„gnitæ si quæ adsint; deinde si reliquæ quantitates non ha„beant eundem denominatorem, eò reducendæ sunt. Tunc „termini singuli numeratorem fractionis constituentes, du„cendi in terminos singulos denominatoris, productaque „singula multipla sumenda secundum numerum quo dimen-

„ siones quantitatis incognitæ in termino numeratoris differunt à dimensionibus ejusdem incognitæ quantitatis in termino denominatoris. Signa autem affectionis productis singulis præponenda qualia lex multiplicationis exigit, quoties dimensiones quantitatis incognitæ plures sunt in termino numeratoris quam in termino denominatoris: at quoties contra evenit, contraria quoque signa productis præponenda; quæ denique omnia æquanda nihilo.

Sint, exempli gratiâ, inventi termini priores, quos maximum designare velimus, isti $\frac{bx^3 - ccxx - 2bccx}{bcc + x^3}$, ubi nulla est quantitas cognita. Hîc ergo, secundum regulam, multiplico terminos omnes numeratoris primum per bcc, priorisque producti ex bx^3 in bcc, scribo triplum, quia bx^3 habet tres dimensiones quantitatis incognitæ x, bcc verò nullam. Secundi producti ex $-ccxx$ in bcc scribo duplum, propterea quod in $-ccxx$ duæ sunt dimensiones x, & in bcc nulla. Tertium verò productum ex $-2bccx$ in bcc scribo simplex, quia in $-2bccx$ & bcc differentia dimensionum x est unitas. Tribus autem hisce productis vera signa affectionis adscribo, quoniam dimensiones x in terminis numeratoris excedunt eas quæ in termino bcc, quippe quæ nullæ sunt, ita ut tria hæc producta sint

$$3bbccx^3 - 2bc^4xx - 2bbc^4x.$$

Jam porrò terminos omnes eosdem numeratoris duco in x^3, terminum alterum denominatoris, primumque productum ex bx^3 in x^3 scribere omitto, sive per o multiplico, quoniam eædem dimensiones utrobique sunt ipsius x, ideoque differentia nulla. Secundum autem productum ex $-ccxx$ in x^3 scribo simplex, quia in his terminis differentia dimensionum x est unitas. At tertium productum ex $-2bccx$ in x^3 scribo duplum, quia differentia dimensionum x in his est 2. Signa verò affectionis productis hisce duobus adscribo contraria iis quæ requireret lex multiplicationis, eo quod dimen-

mensiones x pauciores sunt utrobique in terminis numeratoris quam in x^3, termino denominatoris.

Itaque producta bina erunt hæc $+ ccx^5 + 4bccx^4$; quæ addita tribus præcedentibus
$$+ 3bbccx^3 - 2bc^4xx - 2bbcx^4,$$
faciunt summam æquandam nihilo
$$ccx^5 + 4bccx^4 + 3bbccx^3 - 2bc^4xx - 2bbc^4x = 0;$$
qua æquatione divisa per $ccbx + ccxx$, fit $x^3 + 3bxx - 2bcc = 0$.

Quomodo autem ad hæc perventum sit uno exemplo rursus explicabimus, ex quo eandem in omnibus cæteris rationem esse intelligetur. Videamus igitur priores terminos quos modò proposueram, nempe $\frac{bx^3 - ccxx - 2bccx}{bcc + x^3}$; ex quibus si alios quibuscum eos comparem, ut initio factum est, describere velim, ponendo ubique $x + e$ ubi est x; video quidem primò omnes illos in posterioribus terminis posse negligi in quibus plura quam unum e inerit, quia semper ex iis quantitates orientur in quibus plura uno e inerunt, quæque proinde delendæ tandem erunt, ob causam in superioribus traditam.

Itaque erunt termini priores æquandi posterioribus
$$\frac{bx^3 - ccxx - 2bccx}{bcc + x^3} = \frac{\begin{matrix} bx^3 - ccxx - 2bccx, \\ + 3bexx - 2ccex - 2bcce, \end{matrix}}{bcc + x^3 + 3exx}$$
qui nempe ex prioribus hac lege descripti sunt, ut ubicunque est x vel potestas ejus in prioribus, ibi ponatur $x + e$ vel potestatis $x + e$ duo priores termini; quoniam scimus in cæteris plura quam unum e contineri.

Jam verò porrò, quia termini in quibus nullum e in numeratore ac denominatore priorum ac posteriorum terminorum, iidem planè reperiuntur, patet multiplicationes alternas eorum terminorum denominatoris in terminos nu-

meratoris partis alterius e carentes, omitti posse, cum quantitates inde ortæ eædem utrinque essent futuræ ideoque delendæ. Quare in terminis posterioribus ii tantum ab initio scribendi erant in quibus unum e, omissis omnibus reliquis, ut æquatio hic futura sit ista

$$\frac{bx^3 - ccxx - 2bccx}{bcc + x^3} = \frac{3bexx - 2ccex - 2bcce}{3exx}.$$

Hic jam multiplicationes alternæ per denominatores instituendæ essent ad tollendas fractiones. Verum examinando diligentius quænam futura sint harum multiplicationum producta, aliud adhuc compendium inveniemus, & nec scribendos quidem omnino esse terminos posteriores: quia enim describuntur ex prioribus mutato x in e, præpositoque numero dimensionum ipsius x, non difficile est colligere ex solis terminis prioribus quænam futura sint ista omnia producta.

Ita quoniam propter $- ccxx$ in prioribus, habetur $- 2ccex$ in posterioribus; & propter x^3 in denominatore priorum, in posteriorum denominatore est $3exx$; facile perspicitur utraque producta ex $- ccxx$ in $3exx$ & ex $- 2ccex$ in x^3, quæ sunt $- 3ccex^4$ & $- 2ccex^4$, easdem literas habitura, sed diversos numeros præpositos 3 & 2, idque inde fieri quòd in termino $ccxx$ unam dimensionem minus habeat x quam in termino x^3. Itaque & auferendo postea ex utraque parte æquationis, $- 2ccex^4$, apparet superfuturum $- ccex^4$ à parte terminorum priorum. Quare ab initio hoc sciri potest, multiplicando tantum in terminis prioribus $- ccxx$ numeratoris in x^3 denominatoris, unumque x in e mutando, ac productum simplex scribendo; quia differentia dimensionum x in istis duobus terminis est unitas.

Eadem ratione producta ex $- 2bccx$ in $3exx$, & ex $- 2bcce$ in x^3, quæ easdem literas habent, sunt enim $- 6bccex^3$ & $- 2bccex^3$, habebunt numeros præpositos diver-

versos, propterea quod in $- 2bccx$ una tantum est dimensio x; at in x^3 tres, unde ablato ex utraque parte æquationis $- 2bccex^3$, scio superfuturum à parte terminorum priorum $- 4bccex^3$: quod rursus ab initio cognosci potuit, quia eadem quantitas oritur, multiplicando $- 2bccx$ numeratoris terminorum priorum, in x^3 denominatoris; mutandoque unum x in e, & productum multiplicando per 2, quæ est differentia dimensionum x in terminis $- 2bccx$ & x^3.

At quoniam in bx^3 & in x^3 eadem est dimensio x, sequetur producta ex bx^3 in $3exx$, & ex $3bexx$ in x^3, tum literas easdem, tum eosdem numeros præpositos habitura, ideoque sese mutuo sublatura, ut proinde multiplicatio illa omitti possit.

Atque hujusmodi animadversionibus inventum est quod in regula præcipitur, terminos singulos numeratoris in singulos denominatoris terminos esse ducendos, productaque quælibet multipla sumenda, secundum differentiam dimensionum quantitatis incognitæ in terminis binis qui in se mutuò ducuntur. Nam quod non præcipitur unum x in e mutandum, id hanc rationem habet, quod non referat utrum postea per e an per x omnes termini dividantur.

Quod vero si signa affectionis vera productis singulis præponenda dicuntur, quoties dimensiones x plures sunt in numeratore quam in denominatore, id quoque ex jam dictis intelligetur; uti consequenter etiam hoc quod contraria signa sunt adponenda, quoties dimensionum numerus contra se habet. Velut hic, productum ex bx^3 in bcc scribendum est cum signo $-$ præposito numero 3, ut fiat $- 3bbccx^3$, quia nempe propter bx^3 scimus in posterioribus terminis fore $3bexx$; quod ductum in bcc faciet $+ 3bbccexx$, sed translatum in partem priorem æquationis, fiet $- 3bbccexx$; sive, non mutato x in e, $- 3bbccx^3$.

Quod denique in regula habetur, quoties in prioribus terminis priusquam ad eundem denominatorem reducantur, quantitates cognitæ occurrunt eas primum omnium delendas, id

id ex hoc ſequenti exemplo intelligetur rectè præcipi. Sint enim reperti termini priores, quos maximum aut minimum deſignare oporteat, iſti $\frac{x^3}{2a - x} - 2vx + xx + vv$; ubi vv quantitatem cognitam ſignificet: id igitur delendum eſſe ut appareat, videamus quid futurum ſit ſi non deleatur. Nempe ut ad eundem denominatorem cum cæteris omnibus reducatur, ducendum erit vv in $2a - x$, fietque inde $\frac{2avv - xvv}{2a - x}$ in terminis prioribus. Propter quos in terminis poſterioribus, ſecundum ſuperius, explicata ſcribetur $\frac{-evv}{-e}$, adeoque multiplicatione alternatim utrinque per denominatores inſtituta, ducendum erit hinc $2a - x$ in $-evv$; inde $-e$ in $2avv - xvv$. Ex quibus multiplicationibus eoſdem utrinque terminos oriri neceſſe eſt, cum utrobique eadem hæc tria in ſe mutuo ducantur $2a - x$ in $-e$ in vv, qui proinde termini ſe ſe mutuo ſublaturi eſſent, eoque fruſtra ſcriberentur; ac proinde liquet tuto deleri poſſe ab initio quantitatem vv, idemque quod in hoc exemplo accidit, neceſſario quoque in quibuslibet aliis contingere, diligenter intuenti manifeſtum erit.

III.

REGULA

Ad inveniendas Tangentes linearum curvarum.

IDem *Fermatius* linearum curvarum Tangentes regula ſibi peculiari inquirebat, quam *Carteſius* ſuſpicabatur non ſatis ipſum intelligere quo fundamento niteretur, ut ex epiſtolis ejus hac de re ſcriptis apparet. Sanè in *Fermatii* operibus poſt mortem editis, nec bene expoſitus eſt regulæ uſus, nec demonſtrationem ullam adjectam habet. *Carteſium* vero in his quas dixi literis, rationem ejus aliquatenus aſſecutum invenio, nec tamen tam perſpicuè eam explicuiſſe quam per

per hæc quæ nunc tradĕmus fiet, quæ jam olim, multò ante istas literas vulgatas conscripsimus.

Præcipuum vero operæ pretium tunc fuit compendiosa hujusce regulæ contractio, quam, quoad potui, prosecutus, tandem in ipsas illas insignes Huddenii, Slusiique regulas desinere inveni, quas mihi Viri hi Clarissimi uterque ferè eodem tempore exhibuerant: an vero hac eadem viâ an aliâ in illas inciderint nondum mihi compertum.

Sit data linea curva ut BC, quæ cognitam relationem habeat ad rectam aliquam positione datam AF; ac proinde applicatâ è puncto quolibet curvæ, ut B, rectâ BF, in dato angulo BFA, datoque in recta AF puncto A, certa æquatione relatio quæ est inter AF & FB expressa habeatur. Exempli gratiâ, appellando AF, x; FB, y, sit æquatio $x^3 = xya - y^3$, ubi a lineam quandam datam significare censenda est. TAB. XLV. fig. 2.

Quod si jam ad punctum B tangens ducenda sit BE, quæ occurrat rectæ AF in E, voceturque FE, z, ejus longitudo per hanc regulam Fermatianæ regulæ compendiariam, invenietur, ex sola æquatione data.

Translatis terminis omnibus æquationis datæ ad unam æquationis partem, qui proinde æquales fiunt nihilo, multiplicentur primò termini singuli, in quibus reperitur y, per numerum dimensionum quas in ipsis habet y, atque ea erit quantitas dividenda. Deinde similiter termini singuli in quibus x, multiplicentur per numerum dimensionum quas in ipsis habet x, & è singulis unum x tollatur; atque hæc quantitas pro divisore erit subscribenda quantitati dividendæ jam inventæ. Quo facto habebitur quantitas æqualis z sive FE. Signa autem + & − eadem ubique retinenda sunt; atque etiam si forte quantitas divisoris, vel dividenda, vel utraque minor nihilo sive negata sit, tamen tanquam affirmatæ sunt considerandæ: hoc tantum observando, ut cum altera affirmata est, altera negata, tunc FE sumatur versus punctum A, cum verò utraque vel affirmata est vel negata, ut tunc sumatur FE in partem contrariam.

In curvâ proposita cujus æquatio $x^3 + y^3 - axy = 0$, fiet secundum hanc regulam dividenda quantitas $3y^3 - axy$, divisor verò $3xx - ay$; ideoque $z = \frac{3y^3 - axy}{3xx - ay}$, quæ est longitudo cognita, cum dentur x, y & a.

TAB. XLV. fig. 3. Esto item alia curva ABH, cujus æquatio $axx - x^3 - qqy = 0$, posito scilicet a & q esse lineas datas, AF vero $= x$, FB $= y$. Sit BE tangens, & FE dicatur ut ante, z. Hîc fiet secundum regulam, dividenda quantitas $- qqy$; divisor autem $2ax - 3xx$; unde $z = \frac{- qqy}{2ax - 3xx}$ Ubi cum dividenda quantitas sit negata, si fuerit etiam divisor minor nihilo, hoc est si $2a$ minor quam $3x$, erit z sive fe sumenda in partem ab A aversam. Si vero $2a$ major quam $3x$, sumenda erit FE versus A, ex præcepto regulæ.

TAB. XLV. fig. 4. Horum vero rationem, ipsiusque regulæ & compendii quò reducta est, originem ut explicemus, proponatur ut ante curva BC, ad cujus punctum B tangens ducenda sit.

Intelligatur primum recta EBD, quæ non tangat curvam sed eam secet in B, atque item in alio puncto D, ipsi B proximo; rectæ autem AG occurrat in E; & ab utrisque punctis B, D ducantur ad rectam AG, iisdem angulis inclinatæ BF, DG; & sit AF $= x$, FB $= y$, sicut antea; ponaturque etiam FG data esse, quæ sit e, quæraturque FE $= z$.

Est itaque sicut EF ad FB, hoc est, sicut z ad y, ita EG, hoc est, $z + e$ ad GD; quæ erit $y + \frac{ey}{z}$; & hoc quidem in qualibet curva ita se habere manifestum est.

Nunc porrò consideretur æquatio naturam curvæ continens, ex. gr. illa superius proposita $x^3 + y^3 - xya = 0$, ubi a rectam longitudine datam, velut AH significabat; & patet, cum punctum D in curva ponatur, debere eodem modo duas AG, GD, hoc est $x + e$ & $y + \frac{ey}{z}$ ad se mutuo referri

atque

atque AF, FB, hoc est x & y. Nempe si in æquatione proposita pro x substituatur ubique $x + e$, & pro y, ubique $y + \frac{ey}{z}$, debebit æquatio hinc formata terminos omnes habere æquales nihilo; hoc est

$$\begin{array}{l} x^3 + [3exx] + 3eex + e^3, + y^3 + [\frac{3ey^3}{z}] + \frac{3eey^3}{zz} + \frac{e^3y^3}{z^3} \\ \qquad - axy - [aey] - [\frac{aeyx}{z}] - \frac{aeey}{z} \end{array} = o.$$

In hac autem æquatione constat necessario terminos prioris æquationis, ex qua formata est, contineri debere, nempe $x^3 + y^3 - axy$: qui cum sint æquales nihilo ex proprietate curvæ, idcirco his in æquatione deletis, necesse est etiam reliquos nihilo æquari, in quibus singulis manifestum quoque est vel unum e vel plura reperiri, ideoque omnes per e dividi posse. Qui autem post hanc divisionem non amplius habebunt e, eos, neglectis reliquis, scio nihilo æquari debere, quantitatemque lineæ z sive FE ostensuros; si nempe BE jam tanquam tangens consideretur, ideoque FG, seu e, infinitè parva. Nam termini in quibus adhuc e superest, etiam quantitates infinite parvas sive omnino evanescentes continebunt. Et his quidem hactenus Fermatianæ regulæ origo ac ratio declaratur: nunc porro ostendemus quomodo eadem ad tantam brevitatem perducta sit. Video itaque ex æquatione totâ novissimâ, tantum eos terminos scribi necesse esse quibus inest e simplex, velut hic $3exx + \frac{3ey^3}{z} - aey - \frac{aeyx}{z} = o$. Qui termini quomodo facili negotio ex datis æquationis terminis $x^3 + y^3 - axy = o$, describi possint, deinceps explicandum. Et primò quidem apparet $3exx + \frac{3ey^3}{z}$ nihil aliud esse quam secundos terminos cuborum ab

$x + e$ & ab $y + \frac{e}{z}$ ideo ſcriptos quia in æquatione habentur cubi ab x & y. Nam reliqui omnes termini cuborum, ut & quarumvis aliarum poteſtatem ab $x + e$, & ab $y + \frac{ey}{z}$, vel plura quam unum e habent, vel nullum; ideoque, ut jam diximus, fruſtra ſcriberentur. Eâdem itaque ratione, ſi aliæ poteſtates ab x vel y eſſent in æquatione propoſitæ, ſcribendi forent in æquatione alterâ termini ſecundi tantùm ſimilium poteſtatum ab $x + e$ & ab $y + \frac{ey}{z}$. Notandumque ſecundos hoſce terminos, ex ipſis datis poteſtatibus ab x & y, certa ratione confici; nempe ex poteſtate quavis x, velut x^3, mutando unum x in e, & præponendo numerum dimenſionum ipſius x: ita hîc fit $3exx$. Ex poteſtate y verò ducendo eam in $\frac{e}{z}$ præponendoque ſimiliter numerum dimenſionum ipſius y: ita hîc ab y^3 fit $\frac{3y^3e}{z}$. Quorum quidem rationem ex poteſtatum formatione intelligere facillimum eſt.

Porrò propter xy in termino æquationis $- axy$, facile quoque apparet quid in æquatione ſecunda ſcribendum ſit. Cum enim ſubſtituendum ſit pro xy productum ab $x + e$ in $y + \frac{ey}{z}$, ſed ea tantum ſcribenda in quibus unum e, ideo de duobus $x + e$ tantùm e ducemus in y, & tantùm x in $\frac{ey}{z}$; adeoque fient $ey + \frac{exy}{z}$; quibus in a ductis, præpoſitoque ſigno $-$, quia habetur $- axy$, exiſtet $- aey - \frac{aexy}{z}$, ſicut ſuprà.

Sic

Sic quoque si in æquatione proposita haberetur xxy^3; sumerem propter xx duos priores terminos quadrati ab $x + e$, nempe $xx + 2ex$; & propter y^3 duos priores terminos cubi ab $y + \frac{ey}{z}$, nempe $y^3 + \frac{3ey^3}{z}$; quorum productum pro xxy^3 surrogandum. Sed etiam hîc de duobus $xx + 2ex$ tantùm xx ducendum in $\frac{3ey^3}{z}$, tantumque $2ex$ in y^3 (nam cætera vel plura quàm unum e vel nullum haberent) adeo ut fiat $\frac{3exxy^3}{z} + 2exy^3$.

Atque ex his animadvertere licet, semper utrumque horum terminorum describi posse ex dato termino, qui hic xxy^3, alterum quidem mutato uno x in e, & præponendo numerum dimensionum ipsius; ita enim fit $2exy^3$: alterum verò ducendo datum terminum in $\frac{e}{z}$, præponendoque similiter numerum dimensionum ipsius y; ita enim fit $\frac{3exxy^3}{z}$. Cumque hac eadem immutatione, paulo ante, etiam secundos terminos potestatum ab $x + e$ & ab $y + \frac{ey}{z}$ ex potestatibus x & y æquationis datæ describi ostensum sit, manifestum jam est à singulis terminis æquationis datæ, in quibus x vel potestas ejus, describi prædicta methodo in secunda æquatione totidem terminos in quibus non est z; à singulis verò in quibus y vel potestas ejus, describi totidem terminos, dicta etiam methodo, quarum fractionis denominator sit z; nec alibi hanc literam in secunda æquatione repertum iri.

Hoc igitur cognito, quo pacto ex æquatione quavis proposita, velut hîc $x^3 + y^3 - axy = 0$, alia describenda sit, ut hîc $3exx + \frac{3ey^3}{z} - aey - \frac{aeyx}{z} = 0$, animadverto porro, si termi-

ni divisi per z ad alteram partem æquationis transferantur, ductisque omnibus in z, divisio deinde fiat per terminos in quibus initio non erat z, existere tunc ipsam quantitatem z ab una æquationis parte; uti hîc fiet $z = -\frac{3cy^3 + aeyx}{3exx - aey}$. Atque hinc intelligo ad consequendam quantitatem z, ponendos tantum eos terminos æquationis secundæ, qui descripti sunt ex terminis æquationis primæ in quibus y, sublato tantum denominatore z, mutatisque signis + & —. Deinde dividendo istos terminos per eos qui descripti sunt ex terminis æquationis primæ in quibus x. Porro ex omnibus, tam divisis quàm dividentibus, patet rejici posse e, adeo ut in hoc exemplo fiat $z = -\frac{y^3 3 + ayx}{3xx - ay}$. Itaque rejicitur $\frac{e}{z}$ ex terminis qui descripti sunt ab iis qui habent y. Sic autem descriptos eos superius diximus ut ducerentur in idem $\frac{e}{z}$, præponereturque numerus dimensionum y. Itaque nihil requiri apparet ad terminos hosce (quatenus ad definiendam quantitatem z hic adhibentur) ex terminis æquationis primæ, in quibus y, describendos, quam ut præponamus tantum iis numerum dimensionum quas in ipsis habet y, signaque + & — invertamus. Sic nempe ab $y^3 - axy$, describetur $- 3y^3 + axy$. A terminis verò qui descripti sunt à terminis æquationis primæ in quibus x, cum tantum e hîc rejiciendum patuerit, cumque hos ita prius descriptos dixerimus ut unum x mutaretur in e, præponereturque numerus dimensionum ipsius x; apparet eos, quatenus hic ad constituendum divisorum adhibentur, sic tantum describi opus esse ex terminis propositæ æquationis in quibus x, ut præponatur iis numerus dimensionum ipsius x, ac deinde unum x auferatur. Sic nempe ab $x^3 - axy$ describetur $3x^3 - axy$; & dempto ubique x uno, fiet $3xx - ay$. Atque ex his ratio regulæ ab initio positæ manifesta est. Nam quod signa + & — in terminis qui describuntur ab iis in quibus y, hîc immutanda diximus, in regulâ verò

verò nulla omnino immutanda, id eodem redire liquet cùm quantitatem negatam, sive minorem nihilo, tanquam affirmatam considerandam ibi dixerimus. Ut autem ratio observationis ibidem adjectæ, in utram partem linea F E accipienda sit, intelligatur, repetemus figuram in principio positam, TAB. XLV. fig. 5. ubi vidimus A G esse $x + e$, E G vero $z + e$; unde fiebat GD $+ y + \frac{ey}{z}$. Si autem tangens ab altera parte lineæ B F cadere intelligatur, velut be, atque hæc primùm curvam secare fingatur, ut ibi factum est in d, ducaturque dg parallela bf; fiet ponendo rursus $fg = e$, $fe = z$, ut A g quidem fiat $x + e$, sed eg erit $z - e$, unde $gd = y - \frac{ey}{z}$. Atque hinc porrò facile est perspicere æquationem secundam, quæ ex proposita æquatione, $x^3 + y^3 - axy = o$ describitur, hoc casu fore $3exx - \frac{3ey^3}{z} - aey + \frac{aeyx}{z} = o$, termini ut nempe qui per z dividuntur, habeant signa contraria iis quæ habebant in æquatione descripta casu priori, quæ erat $3exx + \frac{3ey^3}{z} - aey - \frac{aeyx}{z}$. Ex hac verò priori sequitur, quando quantitas $3exx - aey$, sive quando $3xx - ay$ (quæ divisorem constituit secundum regulam) fuerit minor nihilo, sive negata, tunc quantitatem reliquam $\frac{3ey^3}{z} - \frac{aeyx}{z}$; sive etiam $3y^3 - ayx$ (quæ quantitatem dividendam secundùm regulam constituit) esse affirmatam, aut cum illa est affirmata, hanc esse negatam; quia omnes simul æquationis termini æquantur nihilo. At contra ex illa æquatione $3exx - \frac{3ey^3}{z} - aey + \frac{aeyx}{z} = o$, sequitur, quando quantitas $3exx - aey$, sive $3xx - ay$, fuerit negata, tunc reliquam $- \frac{3ey^3}{z} + \frac{aeyx}{z}$,

sive

five etiam $- 3y^3 + ayx$ esse affirmatam, ac proinde $3y^3 - ayx$ esse negatam: aut quando $3xx - ay$ fuerit affirmata, tunc $- 3y^3 + ayx$ esse negatam; ac proinde $3y^3 - ayx$ esse affirmatam. Per hæc itaque apparet ex quantitatibus per regulam inventis, quæ erant $\frac{3y^3 - ayx}{3xx - ay} = z$ judiciari posse ad utrum casum constructio tangentis pertineat; nempe excomperta dissimilitudine affectionis in divisore & dividendo, sequi ad priorem casum eam pertinere, hoc est z, sive FE, accipiendam esse versus A: ex similitudine vero eorum affectionis sequi ad contrariam partem sumendam.

TAB. XLV. Fig. 6. Potest autem quantitas z sive FE per regulam inventa, nonnunquam ad simpliciores terminos reduci ope æquationis datæ, quæ naturam curvæ continet: velut in hac curva AC, axem habente AD, verticem A, cujusque ea est proprietas ut, si à puncto C in eâ sumpta, applicetur ordinatim CD, fiat productum ex cubo BD (est autem B punctum in axe extra curvam datam) in quadratum DA æquale cubo quadrato DC. Sive ponendo BA $= a$, BD $= x$, DC $= y$, fiat æquatio curvæ naturam continens, ista $x^5 - 2ax^4 + aax^3 - y^5 = 0$. Hic ponendo CG esse tangentem, quæ occurrat axi in G, vocandoque GD, z, fit secundum regulam $z = \frac{-5y^5}{5x^4 - 8ax^3 + 3aaxx}$. Quia autem ex datâ æquatione est $y^5 = x^5 - 2ax^4 + aax^3$, restituendo pro $5y$ id quod ipsi æquale est, fiet $z = \frac{-5x^5 + 10ax^4 - 5aax^3}{5x^4 - 8ax^3 + 3aaxx}$; sive dividendo per xx, erit $z = \frac{-5x^3 + 10axx - 5aax}{5xx - 8ax + 3aa}$. Et rursus, dividendo hanc fractionem per $x - a$, habebitur $z = \frac{-5xx + 5ax}{5x - 3a}$. Quod significat faciendum ut sicut BD quinquies sumpta minus BA ter, sive ut BA bis unà cum AD quinquies ad AD quinquies, ita BD ad DG; atque ita GC tacturam in C curvam AC.

IV.

IV.

CHRISTIANI HUGENII EPISTOLA

DE CURVIS QUIBUSDAM PECULIARIBUS.

Mitto tibi constructionem Problematis, quod sine dubio Geometris placebit, si id cum ipsis communicare velis, cum pulcherrimum sit, & singularia quædam contineat: accepi hoc a Marchione de l'Hospital, quem ex specimine hoc & variis aliis, inter summos nostri ævi Geometras referendum puto. Hac etiam occasione ad te mitto quasdam ex posterioribus, super rebus fere similibus, contemplationibus nostris.

Problema March. est; Invenire lineam rectam æqualem datæ portioni lineæ logarithmicæ. Ut hujus inveniat solutionem, sagaciter utitur *Calculo differentiali* celeberrimi Leibnitii, & reducit problema ad quadraturam curvæ, cujus æquatio est, $a^6 = aaxxyy + y^4xx$; positis x & y indeterminatis, quæ angulum rectum efficiunt; Hanc quadraturam ostendit dependere à quadraturâ Hyperboles; quæ datur, ut notum est, positâ logarithmicâ descriptâ; constructio autem huc redit. Sit logarithmica indefinita ACD, asymptotos LO, subtangens constans data a, & portio curvæ sit CD, cui æqualem rectam invenire oportet. TAB. XLVI. fig. 1.

Duc DL, CO perpendiculares ad asymptoton, CE perpendicularem ad DL, & fac LT in asymptoto æqualem subtangenti a, & ductis rectis TD, TE, fiat TV = TD & TI

 = TE:

= TE: tunc junge VD, ductâque ipsi parallelâ IK, e puncto K, ubi occurrit ipsi DL, duc parallelam asymptoto KA, secantem DV in F, CO in X, & Logarithmicam in A. Tum rectæ AX & FK simul sumtæ erunt æquales curvæ CD.

Solutio hujus Problematis, prout ego invenio, potest etiam reduci ad quadraturam curvæ, cujus Æquatio est $a^4 = xxyy - aayy$, quæ, ut & altera, dependet à quadratura Hyperboles, uti possem satis facile demonstrare; sed constructio à modo descripta non differt.

Nescio, an multæ lineæ curvæ hanc habeant proprietatem ut ipsarum longitudines per ipsas curvas mensurari queant; interim ecce unam, quam haud ita pridem inveni, dignam, ut

TAB. XLVI. fig. 2. videbis, quæ & ob alia etiam notetur; Est curva AXKO extensa in infinitum secundum rectam DN, quæ est ejus asymptos, ad quam AD, tangens ad verticem A, insistit perpendicularis; curvæ princeps & simplicissima proprietas est, ut omnis tangens inter punctum contactus & asymptoton, ut KN, sit æqualis lineæ AD; curva pariter extenditur ad alteram partem hujus perpendicularis AD. Ut invenias rectam lineam æqualem portioni hujus curvæ datæ a vertice A, ut AK (sic enim invenies alias portiones quascunque) duc KP perpendicularem ad AD, & descripto arcu circuli PQ, qui habeat centrum D & radium DP, quære in AB parallelâ Asymptoto punctum B, quod sit centrum circumferentiæ circuli, quæ transit per A & tangit arcum PQ, quod facile est; porro ductâ rectâ BD, sume in illâ DY = DA, & e puncto Y duc parallelam Asymptoto usque ad curvam in X, tunc YX erit æqualis curvæ AK; Et natura hujus lineæ talis est, ut si sumas tot proportionales quot volueris, in recta AD, incipiendo a D, ut DS, DI, DP & ducas applicatas SR, IO, PK: partes interceptæ curvæ, ut RO, OK, omnes sint æquales.

Ad quadraturam Hyperboles quoque inservit curva hæc; nam eadem recta YX facit cum AD rectangulum æquale spatio Hyperbolico ADEV, terminato lineis AD, EV perpendicu-

dicularibus ad FDE, unam ex Asymptotis, & quæ sunt inter se in ratione AD ad DP, si Hyperbola AV sit æquilatera & quadratum ejus ad angulum Asymptωτων sit ADFH; unde reciproce patet, quomodo queant & inveniri puncta hujus curvæ positâ quadraturâ Hyperboles.

Habet illa adhuc alias notabiles affectiones, quales sunt, quod spatium infinitum, inter curvam, Asymptoton, & rectam AD, sit æquale $\frac{1}{4}$ circuli cujus radius est AD: quod solidum infinitum, quod producit hoc spatium rotando circa Asymptoton, sit æquale $\frac{1}{4}$ sphæræ ejusdem radii; quod superficies ejus solidi infiniti, sine basi, sit æqualis circulo, cujus radius est diagonalis quadrati ex AD.

Non autem propter ea quæ hucusque proposui de hac curva hic egi, sed quia simplici Machinâ describi potest, quo reducitur Hyperbola ad quadratum, quod mihi visum est Geometrarum consideratione dignum.

Constructio Machinæ nititur in dictâ Tangentis proprietate & principio vel lege motus; scilicet, si in plano horizontali detur punctum, quod suo pondere vel alio modo aliquantulum resistit, junctum extremitati fili vel vectis inflexilis, cujus altera extremitas movetur, punctum illud describet curvam, cujus Tangens semper erit filum vel vectis. In instrumento vel machinâ, de qua dixi, movenda est extremitas D fili vel vectis DA juxta lineam rectam DN, & cavendum ut cuspis in extremitate altera A hærens erecta maneat dum interim premetur in planum horizontale, potius elaterio quam pondere, quoniam sic curva AK describitur sine errore sensibili, licet planum non sit exacte horizontale; Et detegitur, an habeat veram figuram reducendo extremitatem vectis N per eandem rectam ND; quoniam requiritur, ut cuspis regrediatur ex K in A, per eandem viam.

Si hæc descriptio, quæ per leges Mechanicæ est accurata posset haberi pro Geometricâ, eodem modo ut de-

 scri-

scriptiones sectionum Conicarum, quæ fiunt per instrumenta, haberemus inde & quadraturam Hyperboles & perfectam constructionem omnium Problematum, quæ ad hanc quadraturam reducuntur; ut inter alia sunt, determinatio punctorum *Catenariæ*, & logarithmi. Si enim BY sit = AC, quæ sumitur in axe Catenariæ, id est DB = DC applicata ejus CG erit = YX; & eadem quoque YX est logarithmus rationis quam habet AD ad PD; id est, æqualis est distantiæ duarum linearum AD, PD, vel aliarum duarum quarumcunque, quæ eandem habent rationem, ordinatarum perpendicularium ad Asymptoton lineæ logarithmicæ, quæ habet DA pro Subtangente universali; unde possunt inveniri logarithmi tabularum, prout demonstravi in additione ad *dissertationem de causa gravitatis*. Leibnitius, qui primus initium fecit reductionis curvæ Catenariæ ad leges Geometriæ, ipsam illam lineam ope veræ Catenæ tenuissimæ formatam, dixit inservire posse inventioni logarithmorum, vel quadraturæ Hyperboles; licet ad id cognita requiratur (ut quidem ipse noverat) longitudo rectæ, quam vocat curvæ Parametrum, cujus inventionem non demonstrat. Ita ut nostra quadratrix in his usibus præferenda videatur, quia post descriptionem Parameter ejus, quæ est universalis ejus Tangens, datur.

Sed quoniam hæc materia me perduxit ad considerationem Catenariæ quæ elegantissimis hujus temporis Geometrarum inquisitionibus occasionem præbuit, libet hic addere quam inveni peculiarem satis methodum qua hæc delineatur curva, quod est omnium difficillimum inter ea quæ de hac sibi inquirenda proposuere Mathematici. Inter illa, quæ inserenda dedi in actis Lipsiensibus cum pulcris & eruditis Leibnitii & Bernoullii inventis, dixi, me reduxisse constructionem vel inventionem punctorum hujus lineæ ad quadraturam curvæ, cujus æquatio est $a^4 = aaxx + yyxx$ *; & me cognovisse, hanc quadraturam dependere à cognitione summæ secantium arcuum circuli, quæ æqualiter crescerent *per minima*; quæ summa jam dudum reducta fuerat ad quadraturam

* Vide supra pag. 294.

ram

ram Hyperboles per Jac. Gregorium in exercitationibus suis Geometricis, ubi inde deducit solutionem problematis longitudinum, datis vento & latitudinum differentiâ, quod novum credidit Leibnitius, & quod à Gregorio traditum tunc temporis non recordabar. Leibnitius & Bernoullius, ut censeo, pervenerunt ad Catenariæ Constructionem ope Curvæ, quam posterior illorum habet in 1ª. Figurarum quas exhibet ad solvendum hoc Problema; nam Leibnitius mihi scripsit, se etiam ad eandem pervenisse; Et invenio eandem cum illâ de qua ante, cujus æquatio est $a^4 = xxyy - aayy$, cujus quadratura, ut dixi, dependet à quadraturâ Hyperboles: licet nondum concipere potuerim, quomodo calculus illos perduxerit ad hanc lineam. Sed transeo ad meam constructionem, quæ absque consideratione aliûs lineæ curvæ, dat puncta Catenariæ per dimensionem lineæ Parabolicæ.

Primum fundamentum totius inquisitionis respectu hujus lineæ est hoc; Si habeas catenam compositam ex variis ponderibus æqualibus filo appensis, ut BCDEF semper trium interstitiorum se mutuo sequentium duæ lineæ extremæ, ut CD, FE continuatæ sibi mutuo occurrunt in linea IH perpendiculari ad Horizontem, quæ dividit interstitium medium in duas partes æquales. Considerando porro catenam ita compositam à ponderibus connexis ad æquales distantias, quas ponimus infinite exiguas, & dispositis, ita, ut interstitium infimum BC sit horizonti parallelum, si super quovis alio interstitio concipiamus triangula rectangula CDK, DEL, quorum unum latus sit horizontale, videbimus, quod ab infimo initium faciendo anguli DCK, EDL, FEM, tales sint, ut illorum Tangentes æqualiter crescant, ut numeri 1, 2, 3, 4, id quod demonstratu facile est ex dicto principio, licet forsitan eo non pervenissemus sine calculo Algebraico. TAB. XLVI. fig. 1.

Si porro concipiamus partes æquales catenæ CDEFG extensas in recta horizontali in COPQR, & ex prima divisione O ductam OS, quæ concurrat cum perpendiculari CS,

 ita

ita ut angulus COS sit æqualis angulo CDO, si deinde ducantur aliæ rectæ SP, SQ, SR; triangula SCO, SCP, SCQ, SCR erunt necessario similia COD, DLE, EMF, FNG, quoniam SCO est simile ipsi COD per constructionem, & aliorum CSP, CSQ &c. tangentes æqualiter crescunt.

Si porro ducas CT, OV, PX &c. perpendiculares ad SO, SP, SQ evidens est, triangula CTO, OVP, PXQ &c. æqualia esse & similia triangulis COD, DLE, EMF &c. eodem ordine sumendo: unde concluditur, si spatia CD, DE &c. sint infinite parva, ut & partes CO, OP &c., id est si CG sit curva catenæ, & CR æqualis ejus longitudini, tum summa TO, VP, XQ &c. erit æqualis summæ perpendicularium KD, LE, MF &c. id est rectæ GΣ vel axi ΦC (nam spatium BC tum pro nihilo habetur) & summa CT, OV, PX erit æqualis summæ CK, DL, EM &c. idest applicatæ GΦ.

Describendo autem centro S arcum CZ usque ad ultimam secantium SR facile patet, summam infinite parvarum TO, VP, XQ æqualem esse rectæ ZR; consequenter, si ponamus quod SCΦ sit axis Catenæ, & linea CS certæ longitudinis, & quod CΦ sit æqualis ZR excessui secantis cujusvis SR supra radium SC, & quod applicata ΦG sit æqualis summæ omnium CT, OV, PX &c. usque ad illam, quæ cadit in SR, punctum G erit in curva catenæ, cujus longitudo CG erit æqualis rectæ CR: sed quæritur summa infinitarum CT, OV, PX &c. quam obtineo hâc consideratione, quod anguli SOV, SPX, SQY possint haberi pro rectis, utpote quorum differentia cum recto est infinite exigua, & quod tum lineæ OV, PX, productæ utrinque, ut & RΩ perpendicularis ad SR, fiant tangentes Parabolæ CΩ, cujus vertex est C, axis CS, focus S, & in qua SC est pars quarta Parametri; quarum tangentium quævis secatur in duas partes æqualiter per CR, ita ut una dimidia pars pertingat ad axem, altera ad punctum contactus, sic ΔΩ secta est in R; quæ facile demonstrantur. Hinc porro intelligo ex Evolu-

volutione linearum curvarum, de qua locutus sum in *Horologio oscillatorio*, quod summa omnium QY, PX, OV, CT, debeat esse æqualis excessui curvæ Parabolicæ Ω C supra rectam Ω R; id quod Geometræ satis facile intelligent, licet in demonstrando non inhæream, quum non constituerim hic demonstrationes scribere, sed tantum indicare viam, quâ ad inventionem pervenis.

Datâ ergo Catenariæ Parametro SC, si sumas in axe punctum quodcunque Φ, & centro S radio SΦ describas arcum circuli, qui secat CR tangentem ad verticem in R; tangente RΩ ductâ ad Parabolam dictam e puncto R, & subtractâ hac ex longitudine curvæ suæ CΩ quam ponimus posse mensurari, quod reliquum est, erit recta applicata ΦG, & sic per eandem Parabolam invenies tot puncta in illâ curvâ, quot volueris; misi hanc constructionem ad Leibnitium initio Septembris 1691.

Potest porro in transitu notari, quod curva GC (sumendo semper numerum interstitiorum infinitum, & ideo punctum C ac si foret in axe & vertex) erit æqualis rectæ CR; & quod dimensio spatii curvi quoque facile demonstretur, perficiendo rectangulum RCSΘ & producendo perpendiculares GN, FM &c. usque ad SΘ in Λ, Γ &c.: patet enim triangulum SQY esse semissem rectanguli FΛ, basin & altitudinem eandem habentis, & pariter triangulum SPX semissem rectanguli EΓ & sic porro de aliis. Et consequenter triangulum SCR æquale dimidio spatii SCGΛ. Possem ita paucis demonstrare fundamenta omnium quæ de hac lineâ curvâ detecta sunt; sed hæc spectant ad Leibnitium & Bernoullium, utpote hujus inventionis magis participes, quos rogatos oportet, ut in bonum publicum laborem hunc in se suscipiant.

Finem scripto huic imposuissem, nisi nuperrime literas à Marchione de l'Hospital accepissem, ubi quum duo notabilia hac de materia memorat, non possum quin paucis de iis loquar; primum spectat ad constructionem & plures proprietates lineæ curvæ D[ni] de Beaune, quam Cartesius in Ep. 79. 3 vol. dicit ipsi inveniendam propositam per datam Tangen-

Tangentis proprietatem; Problema, quod mihi apparuit difficillimum. Solutio Marchionis exstat in 34. Diario Parisiensi anni ultimi, quare hanc hic non trado.

Alterum est ejus responsum de aliâ curvâ valde cognitâ, & quam Cartesius aliter adhuc consideravit, ut & Huddenius eo tempore, quo negotia Reip. non impediebant, quominus vacaret studiis. Curva in fig. 4. exhibetur, folium ABCH circumscribit & utrimque sese extendit juxta Asymptoton EFG. Æquatio ejus est $x^3 + y^3 = xyn$ si AD ponatur x in recta, quæ cum diametro CA format angulum 45 graduum; perpendicularis DB, vel DH, vel DK, y, & n recta data. Cum ipsi indicassem, me invenisse quadraturam hujus curvæ, & quod contentum folii ABCH esset $= \frac{1}{6} nn$ id est $\frac{1}{3}$ quadrati diametri AC; quod spatium infinitum inter Asymptoton & ambo curvæ brachia etiam ejusdem magnitudinis essent; & quod quadratura generalis segmentorum exprimeretur per unicum terminum; ille invenit veram illam quadraturam generalem. Scilicet quod contentum segmentorum AH vel AK exprimatur per $\frac{nxx}{6y}$ & segmenti AB per $\frac{nyy}{6x}$; sed ulterius mihi affirmat se eo pervenisse per tres diversas vias; quod miror, cum persuasum habeam me non parum profecisse unicam detegendo.

TAB. XLVI. fig. 4.

PRO-

V.

PROBLEMA AB ERUDITIS SOLVENDUM:

A

JOHANNE BERNOULLIO

IN ACTIS LIPSIENSIBUS

ANNI MDCXCIII.

PROPOSITUM.

QUæritur, qualis ſit curva ABC, quæ hanc habet proprietatem, ut, ducta ubicunque tangente BD terminata ab axe AE, portio ejus abſciſſa AD ſit ad tangentem BD in ratione conſtante M ad N. TAB. XLVI. fig. 5.

Problema hoc ſolutu dignum eſt, & facile Mathematicorum applicationem meretur. In quacunque enim ratione ſit M ad N, curva ABC ſemper eadem facilitate motu quodam continuo deſcribi poteſt, non obſtante, quod curva pro ratione M ad N magis vel minus compoſita evadat; in caſu quippe rationis æqualitatis illico patet, curvam ABC eſſe circulum: in reliquis ſi M ad N eſt ut numerus ad numerum, erit quidem curva geometrica, ſecus autem tranſcendentalis eſt. Quæritur generalis determatio puncti in curva.

Tom. II. Ttt C. H. Z.

VI.

C. H. Z. DE PROBLEMATE BERNOULLIANO IN ACTIS LIPSIENSIBUS PROPOSITO.

Elegans inprimis esse hoc Problema, cum ex iis quæ Clarissimus inventor de eo prodidit, tum ex solutione & commentatione fraterna manifestum est. A quo investigando cum propter insignem difficultatem, quæ statim sese offerebat, abstinere statuerim (neque enim omnibus perquirendis, quæ à Viris eruditis exercitii gratia proponuntur, incumbere necesse existimo, aut assequendis parem me profiteor) non desiit tamen quasi invitum compellere recurrens identidem quæsiti non vulgaris idea, donec tandem quod desiderabam obtinui. Inventa nimirum *æquatione differentiali*, in qua ex altera parte erat elementum trapezii hyperbolici, ab asymptoto perpendicularibus intercepti; ab altera elementum spatii curvilinei, quod itidem ad trapezium hyperbolicum reduci posset. Quod apertius exponerem, nisi relinquendam etiamnum aliis putarem inquirendi voluptatem. Inde eo rem deducebam, ut trapezium ejusmodi hyperbolicum secandum esset aut augendum secundum rationem datam. Quod cum per medias aut continue propor-

portionales fieri possit, ubi ratio tangentis ad abscissam est ea quæ numeri ad numerum, hinc apparuit curvam quæsitam tunc iis accensendam quæ geometricæ vocantur, alias esse ex heterogeneis; ac tamen constructionem dari posita lineæ logarithmicæ descriptione, quam quidem hic adducerem, nisi viderem haud difficulter ex ipsa Jacobi Bernoullii doctissima simul brevissimaque solutione omnia erui posse, ut jam ab aliis occupatam dubitem.

Colligitur vero ex his illud animadversione dignum, nempe quandocunque in investigatione curvarum ex tangentibus aut subtangentibus ejus, ad similes ei, quam dixi, æquationes pervenietur, aut in quibus habeatur utrinque elementum spatii ad trapezium hyperbolicum reductibilis; tunc idem hoc, quod mirabile hic accidit, eventurum, ut curvæ geometricæ diversorum generum graduumque existant, si hyperbolarum ad quas devenitur rectangula quæ in asymptotis, sint commensurabilia. Præterea observanda venit in hoc problemate inusitata ac singularis analysis via, quæ ad alia multa in hac Tangentium doctrina aditum aperit, ut egregie jam animadvertit Vir Celeberrimus *calculi differentialis* inventor, sine quo vix esset, ut ad hasce geometriæ subtilitates admitteremur. Porro quod ad curvarum, de quibus agitur, designationem in plano attinet, possem, si operæ pretium esset, alios modos ac fortasse commodiores indicare quam qui a Cl. Bernoullio præscribitur, atque etiam docere qua ratione optime peragatur descriptio nostræ quadratricis hyperbolæ, quæ inter *Tractorias* (ita enim vocari possunt) simplicissima censenda est, cum ad eam filis nihil opus sit, sed bacillo tantum utrimque cuspidem lateri infixam habente, quo fit ut & regressu explorari possit quam recte exarata sit. Sed his supersedendum arbitror, donec insignis usus aliquis harum linearum in lucem proferatur. Interim aliam quandam utilissimam cur-

vam nuper mihi repertam Geometræ sciant, cujus opera horologiis æqualis motus conciliatur, atque ejusmodi ut maris agitatione nequaquam turbari aut imminui queat; quod in pendulis nostris hactenus usurpatis non satis caveri potuit. Adeo ut nova ac certior spes nunc affulgeat perficiendi Longitudinum inventi. Curva hæc formatur,

aabbcdeeeeefiiiiilllmmmmnorrſſttuux.

VII.

C. H. Z. CONSTRUCTIO UNIVERSALIS PROBLEMATIS A CLARISSIMO VIRO JOH. BERNOULLIO PROPOSITI.

TAB. XLVI. fig. 4.

Cum in *actis Lipsiensibus* Constructionem hanc me reperisse significarem, mense Octobri anno 1693, edenda tamen ea supersedi quod futurum putabam, ut vel ab Auctore ipso, vel Clarissimo Viro fratre ejus, vel alio quopiam, non multum absimi-

similis brevi in lucem mitteretur; ac subverebar etiam, ne actum agerem. Quoniam vero nusquam adhuc comparuit, & est inter eas quæ dari possint quodammodo simplicissima, non videtur absque ea diutius relinquendum tam eximium problema. Est autem hujusmodi. In recta AB sit datum punctum A, & oporteat invenire curvam AFC talem, ut tangens ejusquævis CD abscindat a recta AB partem AD, quæ ad ipsam CD habeat rationem datam lineæ C ad L.

Constructio: sicut C ad L, ita quælibet AE, in recta AB assumta ad EF ipsi perpendicularem: & per F punctum ponatur ducta Logarithmica quæcunque cujus asymptotos sit AB, ad quam illa accedat versus A. Deinde ab A versus E acceptâ distantia qualibet AD, sit ut C ad L, sive ut AE ad EF, ita AD ad aliam DH; qua tanquam radio, centroque D, describatur Circuli circumferentia HC; ac præterea applicetur ad Logarithmicam recta IG asymptoto perpendicularis, ipsique DH æqualis. Jam sicut L ad duplum C, ita fiat IE ad EK, sumendam in asymptoto in partem alterutram, nihil enim refert, & applicetur rursus ad Logarithmicam recta KL. Utque duæ simul KL, EF ad earum differentiam, ita sit DH ad DB; quæ sumenda versus A punctum, si AD major sit quam AE; at in contrariam, si minor. Denique erigatur ad asymptoton perpendicularis BC; ea secabit circumferentiam HC in puncto C, quod erit in curva quæsita AFC. Tangit autem hanc recta EF in F.

Porro animadversione dignum est, non simplicem esse curvaturam lineæ hujus cum C major est quam L, sed ex duabus eam tunc componi, ex uno quodam puncto exeuntibus, ut CFA, CM; quarum

hæc in infinitum progreditur. In puncto autem extremo C, recta ex A educta occurrit curvæ utrique ad angulos rectos, ac proportionales sunt DA, DC, DB.

F I N I S.

CHRISTIANI HUGENII

OPERA ASTRONOMICA.

TOMUS TERTIUS.

Tomi tertii contenta.

CHRISTIANI HUGENII
DE
SATURNI LUNA
OBSERVATIO NOVA.

CHRISTIANI HUGENII
DE
SATURNI
LUNA
OBSERVATIO NOVA.

ANNO millesimo sexcentesimo quinquagesimo quinto, Mensis Martii die quinto & vicesimo, Saturni planetam per tubum dioptricum aspectans, animadverti præter ansas sive brachia quæ utrimque illi cohærent, stellulam quandam ab occasu adstantem, tribus circiter scrupulis remotam, eratque disposita secundum eam quæ per utraque brachia ducta fuisset rectam. Et cum subdubitarem nunquid fortasse planeta esset ejus generis, quales circa Jovem quatuor

circumferuntur, locum Saturni ſtellulæque & poſitum utriuſque ad aliam quandam quæ tantumdem fere, ſed in contrarias partes, à Saturno diſſita erat annotavi; ex inerrantium numero hanc potiùs quam illam fore ratus, quod ab ea quam dixi recta linea deflectebat. Neque me feſellit opinio. Poſtridie enim repetita obſervatione, eam quæ ad occaſum ſpectabat ſtellam eodem ad Saturnum ſitu, eodemque quo prius intervallo ſejunctam deprehendi; alteram verò ad duplam ferè prioris diſtantiam receſſiſſe. Unde hanc quidem è fixis unam eſſe, atque à Saturno tum temporis retrogradiente longius relictam, illam autem ſimul cum eo progreſſam, comitem ipſi adeſſe intelligere mihi viſus ſum. Sequentium verò dierum obſervationibus omnis dubitatio ſublata eſt. Namque ab eo tempore per tres continuos menſes, quoties ſerenitas aëris patiebatur, novum planetam notavi, oſtendique amicis, nunc dextrum Saturno nunc ſiniſtrum; redactiſque in commentarios obſervationibus, ſexto decimo die periodum explere cognovi. Digreſſio ſumma tribus ſcrupulis paulo minor viſa eſt, ad quam ubi pervenit maximè fit conſpicuus: at cum Saturno appropinquat ante aut ponè tranſiens biduo propter ſplendorem ejus delitеſcit. Tempus verò ſexdecim dierum tam exactè circuitum planetæ metitur, ut cum annus jam & amplius à primis obſervationibus effluxerit, nihil adhuc aut abundare aut deficere deprehendatur, quoque loco prædicimus ibi ſeſe in cœlo ſiſtat. Scio ante annos complures Ant. Mariam de Rheita non unum, ſed ſenos jam Saturno errones attribuiſſe. Verum æquè circa hos, quàm circa alios illos quinque, quos præter Mediceos Jovi circumpoſuerat, deceptum fuiſſe, inde perſpicitur, quod cum meliori Teleſcopio ſeſe uti Clar. Vir Joh. Hevelius demonſtret, nullum tamen Saturno utut diligentiſſimè ſæpiſſimeque inſpecto comitatum adeſſe

se senserit. Hoc enim ultrò fatetur. Præter Rheitam verò nemo quod sciam simile quid de Saturno prodidit. Nam gemini illi quos Galilæus detexerat laterones longè aliud esse deprehensi sunt quàm prima specie videbantur. Quid tamen sint in incerto est, neque adhuc pronunciare audent Astronomi. Cæterùm mihi novum Saturniæ lunæ phænomenon ad hæc quoque viam aperuit, tandemque causam rescivimus, cur interdum inter binas veluti ansas Saturnus medius teneatur, alias recta quasi brachia protendat, tum nonnunquam omnibus amissis rotundus inveniatur, qualis anno 1642. spectatus fuit, jamque rursus trimestri spatio perstitit. Et harum quidem vicissitudinum tempora in futurum definire non erit difficile si duorum adhuc mensium observationibus attendere licuerit, quæ videndum an hypothesi nostræ consentiant. Expectamus enim ut sub finem Aprilis, si non ante, brachia Saturno renascantur, non curva illa, cujusmodi à Franc. Fontana & Hevelio depicta cernuntur, sed secundùm lineam rectam utrimque prominentia, si quis melioris notæ perspicillo intueatur. Nam vulgaria si adhibeat binos orbiculos referent, sicuti Galilæo primum sese obtulere. Nostrum, quo Saturni asseclam reperimus, quinquagies diametrum rei visæ multiplicat, duodenos pedes æquans: cui postea duplum longitudine construximus, multiplicatione centupla. Cum autem longiora etiam hisce Telescopia, utpote triginta & quadraginta pedum ab aliis fabricari dicantur, aliquid aut vitris vitii inesse, aut hæc eadem non debita proportione mutuò respondere credibile est. Neque enim alias hucusque aciem eorum effugisset novus Saturni satelles.

Observationes præterito præsentique anno collectas, quibus periodus ipsius demonstratur, tunc unà edituri sumus cum integrum Saturni systema perfecerimus. Cujus interea summam sequenti grypho consignare visum

 est,

eſt, ut ſi quis fortaſſe idem ſe inveniſſe exiſtimet, ſpatium habeat ad expromendum, neque à nobis ille aut nos ab illo mutuati dicamur.

aaaaaaacccccdeeeeeghiiiiiiillllmmnnnnnnn
nnooooppqrrsttttuuuuu.

Hagæ-Com. 5. Mart. 1656.

CHRI-

CHRISTIANI HUGENII
ZULICHEMII, CONST. F.
SYSTEMA SATURNIUM,
SIVE
DE CAUSIS MIRANDORUM SATURNI PHÆNOMENON;
ET
COMITE EJUS
PLANETA NOVO.

SERENISSIMO PRINCIPI

LEOPOLDO

AB HETRURIA

Christianus Hugenius S.D.

RES in cælo remotissimas, extraque hominum conspectum positas, nisi cum ab arte sibi auxilium adsciscunt, hoc opusculo persequor, Princeps Serenissime, nec dubito quin multis nimia diligentia versatus dicar in his quæ tam parum ad nos attinere arbitrantur, cum eorum quæ hîc coram & in propinquo nobis sita sunt, plurima investigatu digna supersint. Verum hi parum attendere videntur, quanto præstet cæteris omnibus sublimium rerum consideratio, quamque hoc ipsum præclarum sit, ad tam longe dissitas naturæ partes contemplationem mitti; quæ licet visu obscuræ & exiles, reipsa tamen illustres multoque maximæ existunt. Nam si quod procul absunt, ideo parum ad nos pertinere illas putemus, indigni profecto simus mente rationis participe, qua facile immensa cæli spatia transcendimus, indigni etiam egregio illo, nec unquam satis laudato, propagandæ visionis invento, quo ad astrorum regionem ipso quoque oculorum sensu pertingimus. Cu-

Cujus quidem inventi beneficio ad longinqua Saturni regna propius nunc quam antehac quisquam adivi, & usque eò progressus sum, ut vasti adeo itineris, pars una centesima tantummodo reliqua fuerit: quam si quo pacto superare potuissem, quot qualiaque, dii boni, narranda haberem! Nunc autem ea perscribo quæ ex intervallo isto notare oculis valui, quæque & ipsa miranda esse & relatu dignissima nemo diffitebitur. Quem enim non admiratio capiet, ubi Saturnum annulo circumdatum ac velut corona redimitum viderit? atque hanc eam formam esse, quæ, cum perpetuo eadem sit, diversas tamen facies induat, & pertinaciter hactenus conjecturas Astronomorum frustretur. At neque hoc minus novum atque inopinabile omnium auribus accidisset, Planetam aliquem non antea visum in cælo repertum esse, nisi novitatis gratiam stellæ Mediceæ abstulissent. Verum hic noster Saturni accola, quo diutius latuit, majorique molimine ad terram deducendus fuit, eo magis deprehenso gaudendum est: quodque unus hactenus desideratus, cumulum nunc tandem errantium stellarum explet, numerumque earum duodenarium; quo majorem posthac repertum non iri, prope est ut confirmare audeam. Certè jam majoribus illis ac primariis, inter quos Tellus hæc reponenda est, æquales multitudine minores existunt, & utrique illo, quem perfectum dicimus, numero continentur, ut consilio summi opificis modus hic

præ-

præfinitus videri possit. Cæterum multiplicem contemplandi materiam, Philosophorum ingeniis circa hæc cælestia corpora exorituram, quibus veluti nova accessione mundum auximus, non persequar. Unum hoc inanimadversum eos prætereire nolim; nempe quam non leve argumentum ad astruendum pulcherrimum illum mundi universi ordinem, qui à Copernico nomen habet, Saturnius hic mundus adferat: si enim gravatè olim isti systemati assentientibus, scrupulum demere potuerunt quaternæ circa Jovem repertæ Lunæ; manifestius utique nunc eos convincet unica illa circa Saturnum oberrans, atque ob hoc ipsum quod unica est, nostratis Lunæ similitudinem magis exprimens: ut omittam nunc aliam quoque Saturnii globi cum hoc nostro cognationem, quam in simili axium utriusque inclinatione invenient Astronomiæ periti. Quæ sanè cum mecum reputo, fieri non posse videtur, ut veritatem hisce in rebus tam feliciter repertam, tamque manifestis indiciis fultam, ulla ætas obliterare valeat, quamdiu modo observationum Galilæi aut nostrarum aliqua memoria supererit. Hasce igitur ut ab oblivione vindicarem, utque deficientibus forsan olim organis quibus easdem repetere liceat, esset tamen unde aliquando extitisse probari posset, hac qualicunque scriptione publicandas censui, omnibusque impertiendas. Quod autem Celsitudini Tuæ commentarium hunc inscripserim, feci id non una ratione. Namque in

primis celebritatem claritatemque ei non exiguam ab Illustrissimo nomine tuo acquiri posse credidi; cujus cum per orbem universum, quà modo aliquis virtuti aut humanitati locus est, latè fama pervaserit, librum hunc tibi nuncupare, hoc est velut in edito cunctisque conspicuo loco eum deponere. Deinde nec ignorabam quantum momenti accessurum esset invento illi nostro, quo perplexa Saturni mysteria exponere conatus sum, si exactissimo tuo judicio illud probari contingeret: quod utinam non frustra speraverim. Sed ante omnia occasionem aliquam me invenisse gavisus sum, neque omittendam duxi, qua palam commemorarem quantum tibi, Princeps Celsissime, artes disciplinæque optimæ, & in his Mathematicæ præsertim debeant, quod contra invalescentem indies barbariem patronum iis ac defensorem te præstas, quodque familiariter eas colendo, ac velut in contubernium tuum admittendo, plurimum dignitatis ipsis concilias: quod denique præstantissimorum ex omni antiquitate Autorum scriptis in vitam revocatis easdem promoves ac locupletas. Nempe ad hæc facienda, & illustria majorum tuorum exempla & innata virtus & egregia animi tui propensio te impellunt. nos autem ad quos optimæ hujus tuæ voluntatis curæque utilitas pervenit, grato animo illa agnoscere & prædicare æquum est. Hagæ Comitis, 5. Julii. Anno 1659.

NICO-

NICOLAUS HEINSIUS, D. F.
AD AUCTOREM SYSTEMATIS.

Laudibus Hugeni pars addite magna paternis,
Quem totum Vranie vindicat una sibi.
In cunis placiti reptare per avia cæli,
Astra tibi puero volvere ludus erat:
Astra minus patriis non trita penatibus olim;
Cognita natali non minus astra solo.
Jamque eadem populis mirantibus astra recludis,
Perspicua ingenii lumine facta tui.
Qualis sidereo radiatus in æthere Titan
Oppositam nocti spargit ubique facem.
Ardue stellantis salve metator Olympi,
Qui superâ nobis das regione frui:
Per quem, discussâ dubiæ caligine mentis,
Inserimur liquido cominus ora polo.
Devocat in terras, magico sine carmine, Lunam
Æqua Syracosio cui manus arte seni.
Ecce Jovis genitor tenebroso carcere per te
Et fugit, & lætam rursus oberrat humum.
Macte ausis studioque; Deos qui vindice chartâ
Asseris: inventi qui facis astra tui.
Nunc sua Saturno cum vincula demseris ipsi;
Sæcla tuum terris aurea munus eunt.

IN IDEM SATURNI SYSTEMA.

Omnia qui magni dispexit sidera Mundi,
Viderat hæc oculo debiliore Conon.
Attigit illa Conon miris adjutus ab alis,
Attigit, & visu nobiliore, meus.
Perque vias Lunæ, per, qua Cyllenius errat,
Volvitur & Veneri Martia flamma comes;
Quique nitet famulos inter tot Jupiter ignes;
Lumina falcigeri misit ad astra Dei:
Et didicit vario quare mutabilis ore,
Ludat in obscurâ mobilitate Senex:
Quod frontem diadema premat, quo, Circulus illi
Aureus, infaustum cingat honore caput:
Quæ noctes ibi Luna regat, quæque, æmula nostræ,
Expleat amissum Cynthia luce diem.
Nec satis hæc vidisse sibi miracula, testes
Convocat, & visis quærit ubique novis.
Noluit hæc nostros fugerent arcana nepotes,
Ignaros cœli nec sinit esse sui.
Ampla satis Juveni est, ut debita gloria, merces,
Vocibus innumeris quam sua fama sonet,
Gloria sideribus quam convenit esse coævam,
Et tantum Cœlo commoriente mori.

CONST. HUGENIUS. C. F.

CHRISTIANI HUGENII

ZULICHEMII, CONST. F.

SYSTEMA SATURNIUM.

CUM ad cœleſtium contemplationem tubos opticos, nobiliſſimum Belgicæ noſtræ inventum, Galileus admoviſſet, celeberrimaque illa Planetarum phænomena mortalibus primus aperuiſſet; in his, ea quæ de Saturni ſtella prodidit, vel præcipuè admiratione digna fuiſſe videntur. Nam cætera quidem, etſi ſuſpicienda meritò ac magni facienda, non tamen ejuſmodi erant, ut, quibus de cauſis talia cernerentur, enixè quærendum eſſet. Saturni vero mutabiles figuræ novum quoddam & reconditum naturæ artificium præferebant, cujus certè rationem neque Galileo ipſi, neque tanto poſt tempore Aſtronomorum cuiquam (pace eorum dixerim) divinare contigit. Hunc primò non ſimplici orbe lucentem, ſed veluti tergeminum conſpexerat, binis ſtellis minoribus mediæ majori proximè utrinque adjectis. Eâque formâ triennio fere abſque ulla mutatione perſeverante, certò ſibi perſuaſerat, quales Jovi quatuor, tales duos comites Saturno obtigiſſe, nullo tamen motu præditos, eóque ſimili poſitu ſemper lateribus hæſuros. Verùm ſententiam mutare coactus eſt, ſolitario Saturno prodeunte, ac priore ſatellitio penitus deſtituto. Quod cum admirabundus vidiſſet & cauſam rei conjectura aſſequi tentaret, de reditus tempore, quo prior illa phaſis reſtitui deberet, nonnulla vaticinatus eſt. Sed neque hæc ita tunc ſucceſſiſſe quemadmodum ſperaverat deprehenſum eſt, nec gemina modò aſpectus diverſitate Saturnum contentum eſſe. Etenim aliæ deinceps mirabiles ac prodigioſæ formæ appa-

ruerunt, quas primùm à Josepho Blancano & Francisco Fontana descriptas novimus; adeo quidem insolita specie, ut multis oculorum ludibria censerentur, imaginesque vitris potius quam cælo hærentes: donec pluribus eadem videntibus, haud vano indicio proditas fuisse constitit.

Igitur ipse quoque ad hæc cæli miracula conspicienda magno desiderio actus; cum non nisi vulgaria suppeterent perspicilla, quinum aut senum pedum longitudine; artem eam qua vitra in hosce usus figurantur quanta potui cum cura diligentiaque excolere aggressus sum, nec piguit ipsummet operi manus admovisse, quoad multis superatis difficultatibus (nam plures in recessu hæc ars habet quam prima fronte præferre videatur) ea denique vitra mihi effeci, per quæ ad hæc scribenda præbitum est argumentum. Continuo enim ad Saturnum telescopia dirigens, aliam ibi rerum faciem reperi, quàm plerisque antehac fuerat credita. Nam quæ vicinæ illi hærebant appendices, eas non sane geminos planetas, sed quidvis potius aliud esse, diversum vero ab his unumque numero planetam, majori intervallo à Saturno remotum, diebus sexdecim circa eum ambire apparuit; & hunc quidem omnibus antehac sæculis ignoratum. De qua nova nostra observatione tribus abhinc annis Astronomos certiores feci, prudenti consilio obsecutus viri Illustris, ingenioque juxta ac virtute conspicui, Joh. Capelani. Huic enim, uti & Gassendo aliisque, cum Lutetiæ Parisiorum agens, de Saturni comite à me viso narrassem, multas ob causas censuit, non reticendum tam gratum omnibus futurum nuncium, quoad illud quod meditabar integrum Saturni Systema perscripsissem. Itaque anno 1656 die 5 Martii, de Saturni Luna (ita enim novam stellam nec immerito appellavimus) observationem emisi*, atque unà hypothesin quæ causam reliquorum Saturni phænomenôn contineret; sed hanc confuso elementorum quibus scribebatur ordine, quo tantùm, non ignorasse nos eam illo jam tempore, testatum esset, aliique etiam ad vulganda quæ commenti essent hoc pacto invitarentur, neque sibi præreptam quererentur inventionis gloriam. Deinceps ve-

* Vide supra pag. 523.

vero rogatu ejusdem Viri eximii, solvi quoque hunc literarium gryphum, totamque hypothesin summatim illi exposui: unde jam ad plures forsitan nostra de Saturni phasibus sententia manaverit. Sed pleniorem utique tractationem postulat mira & insolens circa hunc planetam naturæ fabrica, neque expectare debemus ut vel à nobis relatis, vel ad explicanda phænomena adsumtis, fidem omnes habeant, nisi & hæc rationum momentis, & illa observationum testimonio adstructa viderint. Quamobrem horum utrumque nunc præstare nobis propositum est. Ac primò quæ ad comitis planetæ motum periodumque spectant accuratè, quantum fieri poterit, ex observatis definiemus, motusque ejus tabulas condemus. Deinde ipsius Saturni phases singulas suis causis assignabimus, ita ut futuras quoque inde prænoscere in promptu sit.

Sed antequam observationes exhibeamus, de telescopiis nostris quibus cælo eas deduximus, pauca referre expediet, ut sciant hinc, qui comitem Saturni, mirabilesque Planetæ ipsius figuras intueri cupiunt, qualibus ad hoc turbis vitrisque indigeant; útque suos si quos habent, possint cum nostris contendere. Primus quem adhibuimus duodenos pedes non excedebat, duobus convexis vitris instructus, quorum id quod oculo vicinum erat, radios parallelos cogebat ad trium paulo minus pollicum, sive unciarum pedis Rhenolandici distantiam. Eo planetam novum & deteximus primùm, & per aliquot menses observavimus, nec non formam eam Saturni, quæ à nemine adhuc percepta fuerat, quámque postea describemus, licet non prorsus erroris expertem. Inde verò duplicata priori longitudine, simul duplo propiores sideribus facti sumus, multóque meliùs faciliúsque phænomena omnia adnotavimus. Et hi quidem tubi 23 pedum, è ferri bractea constructi sunt, habentque ab altera parte vitrum insertum, cujus latitudo ad quatuor pollices, sed in quo non major pateat circulus quam diametro duorum pollicum cum triente. Ab altera parte, quæ nimirum oculo admovetur, bina sunt vitra minora, ii pollicem diametro

Telescopiorum nostrorum descriptio.

ar-

æquantia, juncta invicem, quæque hoc pacto æquipollent convexo colligenti radios parallelos ad intervallum unciarum 3, aut paulo etiam angustius. Ex quo sanè majoris vitri excellentia æstimanda est, tam breve convexum perferre valentis: quoniam quanto minori de sphæra id fuerit, tanto res visæ magis ampliantur. Illud enim in Dioptricis nostris demonstratum invenietur, speciei per tubum visæ ad eam quæ nudo oculo percipitur, hanc secundum diametrum esse rationem, quæ distantiæ foci in exteriori vitro ad illam, quæ in interiori sive oculari vitro est, foci distantiam. Centuplam itaque fere rationem hanc in perspicillis nostris esse constat, cum Galileana non ultra trigecuplam processerint. Nam quantitatem incrementi eodem modo nos atque ille æstimamus; nempe ut tanto major res quæque per tubos quam nudo visu conspici dicatur, quanto majori angulo ad oculum extrema ejus deferuntur, sive quanto latior ejus imago in fundo oculi depingitur.

Quantum iis res visæ amplientur. Augmentum telescopio perceptum quomodo æstimetur.

Alia ejusdem falsa æstimatio.

Est autem & alia æstimandi augmenti ratio, sed parum ex vero, cùm absque ulla anguli consideratione apparentem perspicillo alicujus rei magnitudinem determinamus; velut cum Jovis orbem circello duorum aut trium digitorum latitudine æqualem nobis cerni putamus. At enim cum idem circulus, trium puta digitorum diametro, major minorve necessario appareat, pro diversa sui ab oculo distantia, nonne etiam adjiciendum sit, quanto ex intervallo conspectus circulus disco Jovis æqualis cernatur? Profectò nisi hoc addatur, nihil certi ea comparatione designari videtur. Et tamen ratio subest cur magis una quæpiam quam alia magnitudo imagini visæ tribuatur, & quidem à pluribus sæpe spectatoribus eadem. Verùm de his aliàs fortasse. In præsentia illud ostendisse suffecerit, fallacem omnino esse hoc modo initam æstimationem. Idque primùm inde liquet, quod Lunâ aut signo aliquo cælesti, velut Orione, prope horizontem conspecto, idem longè majus visus judicet, quam ubi altè jam ac supra verticem penè adstiterit, cum tamen hìc nihilo minori angulo illud comprehendi certum sit. In his autem quæ telescopio in-

intuemur major adhuc error contingit. nam cum, exempli gratia, vel triplo latior secundum diametrum appareat Jupiter, oculo altero per telescopium nostrum spectatus, quam Luna oculo altero vacuo, atque adeo utrâque hac specie, in unum convenire jussâ, latè à Jove Luna contegatur; nihilominus cum seorsim Jupiter inspicitur, trium circiter digitorum latitudinem plerisque spectatoribus æquare tantummodo existimatur. quanquam aliquos repererim qui disco Lunari æqualem faciebant, atque ita tertiam partem saltem tribuebant ejus quæ reipsa apparet amplitudinis. Quamobrem de multiplicatione telescopii malè hoc modo inquiri certum est. Fiet autem rectè Galilei methodo, quam in Sidereo nuntio tradidit; vel, quia hæc in prægrandibus telescopiis difficultatem habet, inquirendo foci distantias in singulis vitris, easque inter se comparando. Qua ratione diximus centuplum fere augmentum tuborum nostrorum reperiri.

Quænam circa planetas cæteros & fixas observata.

Cæterùm libenter intellecturos credo qui hæc legent, qualia etiam eorum ope de reliquis præter Saturnum planetis fixisque stellis observaverimus: de quibus breviter ergo hæc habeant. In primis sæpe illud quæsivimus, num aliqui etiam apud Venerem, Martem aut Mercurium comites circumferrentur, ubi tamen nullos unquam reperimus. Apud Jovem autem quatuor neque amplius. Qui quidem semper ac facilè telescopio nostro patent, nisi cum disco suo aut umbra Jupiter aliquem abscondit. Inde verò quamprimum rursus emergere incipiunt fiunt conspicui, imò priusquam toti exierint, ut non semel me vidisse memini. Porrò quæ in Jove zonæ seu fasciæ quibusdam animadversæ sunt, non semper eâdem formâ præditæ; has ego & qui mecum observarunt perspicuè sæpe animadvertimus reliquo Jovis corpore magis lucidas, cum tamen alii obscuriores asserant; quibus forsitan interjectum spatium inter binas zonas lucidiores pro una obscuriore fuerit. Atque anno quidem 1656, multo majori intervallo, quam sequentibus tribus, illas à se mutuo distare comperimus, sicut in adjunctis delineationibus videre est. Qua ex instabilitate non malè forsan colligemus, ad instar nu-

In Jovis disco zonæ candicantes.

TAB. XLVII. fig. 1. 2.

nubium nostrarum, vapores quosdam vicinum Jovi ætherem insidere, qui nunc his nunc illis climatis crebri magis confertique exoriantur.

In Marte zona obscura. TAB. XLVII. fig. 3.

In Marte quoque cingulum ejusmodi unicum anno 1656 deprehendi, latum admodum, mediámque disci partem offuscans, quemadmodum figura adjecta demonstrat. Insuper discum planetæ hujus parte aliqua deficientem vidi aliquoties, & in Venere phases omnes quales Lunæ. Verùm hæc minoribus etiam telescopiis alii notarunt.

Fixarum diametri nulla latitudine.

Fixarum autem diametros etiam maximè splendidarum nulla unquam latitudine cernere potui, sed tantum minimi puncti instar, quoties vitris usus sum fuligine leviter infectis ad auferendos radios. At ex Hevelii consilio, quod in egregio ejus extat opere Selenographico, exterius vitrum contegens, ita ut exiguum tantum foramen relinquatur, aliquam magnitudinem præ se ferre illas vidi; quam proinde non stellarum propriam esse, sed ex aliqua visus fallacia nasci arbitror. Nam nostra quidem illa methodus, trans fumum, quo lens proxima oculo tincta est, stellas inspiciendi, certa est omnique erroris suspicione carens; atque ita planetas quoque nimia luce radiantes, solemque ipsum intueri solemus. Foramine autem exiguo majorem lucis partem excludendo, non tolli penitus circumfusos sideribus radios, sed in orbem minorem satisque perfectè circinatum eos cogi opinor, qui imprudentibus pro ipsius stellæ corpore imponat.

Phænomenon in Orione novum.

Unum verò circa fixas phænomenon relatu dignum occurrit, à nemine hucusque, quod sciam, animadversum, nec quidem nisi grandibus hisce telescopiis rectè observandum. In Orionis ense tres stellæ ab Astronomis reponuntur inter se proximæ. Harum mediam Anno 1656 fortè per tubum inspicienti mihi, pro stella una duodecim (quod quidem minimè novum) sese obtulerunt; eo positu quem subjecta figura expressimus.

TAB. XLVII. fig. 4.

Ex his autem tres illæ pene inter se contiguæ, cumque his aliæ quatuor, velut trans nebulam lucebant, ita ut spatium

tium

tium circa ipsas, qua forma hìc conspicitur, multo illustrius appareret reliquo omni cælo; quod cum apprime serenum esset ac cerneretur nigerrimum, velut hiatu quodam interruptum videbatur, per quem in plagam magis lucidam esset prospectus. Idem verò in hanc usque diem nihil immutata facie sæpiùs atque eodem loco conspexi; adeo ut perpetuam illic sedem habere credibile sit hoc quidquid est portenti; cui certè simile aliud nusquam apud reliquas fixas potui animadvertere. Nam cæteræ nebulosæ olim existimatæ, atque ipsa via lactea, perspicillo inspectæ, nullas nebulas habere comperiuntur, neque aliud esse quam plurium stellarum congeries & frequentia.

In Lunæ facie autem quàm multa, diligentissimis quibusque observatoribus prætereita, tubis nostris detegantur, non referam; quandoquidem schemate ad hoc descripto opus esset, eoque amplissimo. Quem laborem hactenus non suscepimus, credimusque exiturum in immensum, si montium omnium eminentias & anfractus, qua multitudine nobis videntur, depingere conemur. Itaque ad Saturni observationes pergo, de quibus sciendum est, priores omnes, usque ad eam quam 19 Febr. Anno 1656 annotavimus, tubo 12 pedum peractas esse, reliquas pedum 23. Uterque autem everso situ visibile referebant, ideoque schemata omnia, non ut primùm descripta fuerant, hìc expressimus, sed supera inferis, dextra sinistris permutavimus, ut vera pateret dispositio.

Die igitur, secundum Calendarium Gregorianum, 25 Martii, Anno 1655, circa horam 8 vespertinam, Saturnum conspexi cum brachiis utrinque secundum rectam lineam extentis; tribusque fere scrupulis ab eo distantem occasum versus stellulam quandam exiguam *a*, sic sitam, ut si per brachium utrumque recta duceretur, ea in illam incurreret, aut certè pauxillo tantum inferior transiret. Alteraque item versus orientem stellula *b* aderat, paulo longius à Saturno remota, & brachiorum lineâ multo inferior. Et hac quidem prima vice suspicatus sum stellam *a* Saturnum comitari, quoniam

Circa Saturnum observationes. TAB. XLVII. fig. 5.

niam alias quoque vicinam illi animadverteram, similique fere positu.

TAB. XLVII. fig. 6. Porrò brachia Saturni recta quidem utrinque extensa cernebantur, sed versus extremas cuspides crassiora paulo quam qua parte Saturni disco cohærebant, qualia sequens schema exhibet.

Eâque formâ usque ad occasum Heliacum Saturnus perstitit. Cæterum cum post phasin rotundam Anni 1656 brachia denuo recepisset, eadem quidem illa forma reversa est duodecempedali tubo spectanda: sed tunc majori tubo 23 pedum adhibito alteram hanc figuram veriorem esse patuit; unde antea quoque talem extitisse credibile fiebat, quæ tamen minori telescopio perfectè conspici nequiisset. At lineam illam obscuram, brachia utraque conjungentem, ac tota tamen infra se relinquentem, etiam 12 pedum telescopio notavimus. TAB. XLIX. fig. 6.

TAB. XLVII. fig. 7. Die sequenti, nempe 26 Martii stella *a* eodem modo eademque qua prius distantia juxta Saturnum collocata erat, *b* verò duplo quam ante remotior. Unde, quum distantia inter se stellularum *a* & *b* major esset effecta, sequebatur vel utramque vel alteram saltem erraticam esse. Et stellam quidem *a* necessario talem judicavi, quoniam Saturnum eo tempore retrogradum esse noveram; itaque oportebat cum Saturno illam in eandem plagam delatam esse, quum alioqui propinquior multo fieri debuisset. Altera vero *b*, quominus fixa censeretur nihil obstabat, imo prorsus ita existimari consentaneum erat, cum una die tantum ab illa Saturnus recessisset, quantum motus ejus postulabat. Neque verò aliter se rem habuisse sequentes observationes ostendunt.

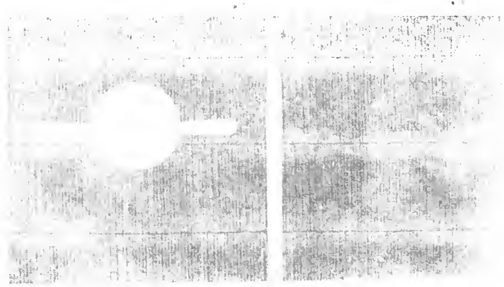
TAB. XLVIII. fig. 1. Martii 27. stella *a* Saturno propior facta erat: *b* verò adhuc longius recesserat.

Inde nubili dies intercesserunt usque ad 3 Apr. quo die fixam *b* non amplius annotavi, sed stellula *a* migraverat ad Saturni latus Orientale, rursusque fere 3 scrupulis distabat. *fig.* 2.

Quinque diebus sequentibus, rursus ut ante impeditæ observationes.

9 Apr.





9 Apr. denuo ad occidentem ſitus erat comes *a* ſicut 27 Martii, fixaque altera *c* à parte orientali Saturno admodum propinqua animadvertebatur, uno circiter ſcrup. diſtans, lineaque brachiorum, uti præcedens, inferior. TAB. XLVIII. fig. 3.

10 Apr. Saturnus à fixa *c* longius abſceſſerat, & comes à Saturno. *fig*. 4.

Diebus duobus ſequentibus aucta fuit continuè diſtantia ſtellæ *c*, comitis *a* eadem fere manſit. Nempe

11 Apr. hic poſitus fuit. *fig*. 5.

12 Apr. talis. *fig*. 6.

13 Apr. comes videri nequiit, quoniam & Saturno propior factus erat, & Luna adventabat. Fixa *c* ulterius ſemper recedebat, ſed lentiore paſſu. *fig*. 7.

14 & 15 Apr. comes non apparuit ob viciniam Saturni.

16. Cælum nubilum.

17. Comes ad ortum ſitus erat, diſtans fere 3 ſcrup. ſtella vero *c* longius abierat, ſemper tamen oculis notata; Ac poſtea quidem eadem ad Saturnum reverſa eſt, ut ſequentes obſervationes docebunt. *fig*. 8.

18. Apr. comes ſitum mutaſſe non videbatur.

19. Apr. paulo propius ad Saturnum acceſſerat. *fig*. 9.

20. Apr. magis appropinquaverat. *fig*. 10.

21. Apr. Adhuc magis; cernebaturque anſarum lineâ paulo ſuperior. *fig*. 11.

29 Apr. Occidentalior Saturno comes factus erat, ac tantundem diſtabat quantum 21. Apr. *fig*. 12.

Ultima Apr. Comes prope Saturnum delituit.

3 Maji, in quem diem inſtitio Saturni incidit, comes in maxima ab eo diſtantia videbatur, orientem verſus. *fig*. 13.

Diebus inſequentibus uſque ad 27 Maii, ejuſmodi poſitus fuit qualem exhibent ſchemata ſubjecta.

6. Maji. *fig*. 14.

7. Maji. *fig*. 15.

10. Maji. *fig*. 16.

11. Maji. *fig* 17.

12. Maji. *fig*. 18.

14. Maji. *fig*. 19.

15. Maji. ægre conſpectus comes propter inſtans plenilunium. *fig*. 20.

17. Maji, Comes non apparuit.

18. Maji. *fig*. 21.

19. Maji. *fig*. 22.

20. Maji. *fig*. 23.

27. Maji, Comes occidentem verſus in maxima à Saturno diſtantia reperiebatur. Saturnus autem jam rurſus ad ſtellam *c* ſuperius notatam appropinquare cœperat, remotus circiter 10 ſcrup. Ita verò nunc poſita hæc erat, ut linea brachiorum Saturni continuata ſubter eam ferretur, cum die 10 Apr. ſupra tranſiiſſet. Sed & Saturni ipſius ſemita, uti ex ſequenti obſervatione liquebit, ſtellâ *c* inferior hac vice fuit, quæ priori illius applicatione ſuperior contigerat. *fig*. 24.

Ultima Maji, Saturnus ſtellam *c* jam prætererat; comes ad occaſum ſitus erat, ſed aliquanto propior quam die 27. *fig*. 25.

13 Jun. Ultima fuit ante occaſum Heliacum obſervatio, comes in maxima diſtantia cernebatur, Saturno occidentalior. *fig*. 26.

Saturnus brachiorum expers inventus.

Poſtquam ex radiis Solaribus Saturnus emerſiſſet Anno 1656. Jan. 16, hora 12, primùm à me obſervatus eſt, cum ad hoc uſque tempus peregre abfuiſſem. Inveni autem brachiis ſuis ſpoliatum penitus, & comitem ad orientem ſitum, in maxima fere diſtantia. *fig*. 27.

TAB. LI. fig. 4.

Rotundum autem Saturnum, ſub finem Novembris, aliqui jam obſervaverant; eâque formâ perſtitit uſque dum rurſum radios Solis ſubiret.

TAB. XLVIII. fig. 28.

19 Febr. tubo 23 pedum primùm uſus ſum, comitemque Saturno propinquum reperi, ubi priori teleſcopio ægre potuiſſet animadverti.

16 Martii, circa octavam adhuc propiorem Saturno comitem vidi, ad orientem ſpectantem, uti obſervatione ſuperiori. *fig*. 29.

30 Martii, hora 8, pari propinquitate, ſed ad alteram partem comes ſtabat. *fig*. 30.

18 Apr.

18 Apr. ad ortum situs erat comes in maxima distantia. *fig.* 31.

17 Jun. hora 9½ ultimo ea vice observatus fuit Saturnus, satellite versus occidentem adstante, & mediocriter remoto. *fig.* 32.

Hisce autem observationibus omnibus quandiu Saturnus rotundus apparuit, transversa illa linea, cæteris disci partibus paulo obscurior, ex æquo medium ejus discum secabat, eratque ad satellitem directa. Et hac quidem observatione 17 Junii habita, primùm animadverti motum Saturni, eum scilicet quo propter telluris vertiginem cum cælo pariter quotidie circumferri putatur, secundum eandem illam incedere lineam.

Eodem Anno 1656, Octobris die 13, manè hora 6, rursus Saturnus videri cœpit, cui jam brachia erant renata; serius quidem quàm in observatione edita prædixeram, verùm haud aliâ formâ, quæ nimirum eadem planè fuit atque anno præcedenti: licet melius nunc cujusmodi esset discerneretur, ob adhibitos tubos præstantiores. *Brachia Saturno renata.* TAB. LI. fig. 5.

Fascia autem illa seu zona obscurior, paulò inferior brachiorum linea nunc apparebat, cum anno 1655 superior fuisset. Eratque Saturni motus, quo cum cælo corripi videtur, secundum hujus zonæ ductum, ac proinde secundum rectam quoque lineam per utraque brachia protensam, ac semper postea quotquot observationibus idem inquirere libuit, eodem modo rem sese habere comperi. Comes conspici hac vice nequiit, forte an ob ingruentem Solis exortum, aëremque crassiorem prope horizontem.

Die autem 19 Oct. hora 6 mat. apparuit comes Saturno occidentalior, vix mediocri distantia absistens, quæ diebus sequentibus duobus aucta est continuè. TAB. XLVIII. fig. 33.

21 Oct. hora eâdem, erat comes in distantia maxima occidentali. *fig.* 34.

25 Oct. hora 6. mat. non apparuit comes.

9 Nov. hora 5½ mat propinquus Saturno comes existebat, occidentalis rursum, ac lineâ ansarum paulo superior. *fig.* 35.

26 Nov. hora 6½ mat. comes latuit. Brachia vero paulo

la-

latiora evaserant, & quà Saturno junguntur, minus intensa luce quàm versus extremas cuspides lucebant, & hac fere specie ad occasum usque Heliacum Saturnus permansit.

27 Nov. hora 6 mat. satelles ægre conspiciebatur, ad orientem situs, & brachiorum linea superior. *fig.* 36.

16 Dec. 6 mat. videbatur satelles in maxima distantia orientali. *fig.* 37.

Anno 1657, 5 Jan. hora 12½ comes latebat.

18 Jan. hora 12, erat in mediocri distantia, orientem spectans. *fig.* 38.

A Saturno autem polum versus dimidio circiter gradu distabat fixa 3 magnitudinis, quæ est in ventre Leonis, longitudine respondens Virginis gr. 4. 5'. cum latit. borea gr. 2. 49'.

22 Martii hor. 7½ vesp. comes in maxima distantia orientali, & ansarum linea paulo superior; linea obscura non satis erat conspicua.

Scripsit mihi Hevelius se quoque pridie hujus diei comitem Saturni observasse ad orientem situm in maxima distantia, quod satis bene cum nostra hac observatione convenit.

29 Martii hora 7½ comes erat in mediocri distantia occidentem versus, & in eadem cum brachiis recta. *fig.* 39.

30 Martii, comes in maxima distantia occidentali. *fig.* 40.

Qua vespera Hevelius quoque ad eandem partem sibi conspectum asserit, sed difficulter, unde fortasse de distantia minus recte judicaverit, nam 1½ scrupulo tantum abfuisse à Saturno scribit.

18 Maji, comitem mecum observavit Bullialdus occidentaliorem Saturno, & in mediocri distantia. *fig.* 41.

19 Maji, proximus Saturno adstabat comes occidentem versus, vix ansarum linea superior. *fig.* 42.

Brachia Saturni in ansas mutari cœpta. TAB. XLIX. *fig.* 7.

Anno eodem 1657. 17 Dec. hora 5½ manè, quo die primùm post ortum Heliacum Saturnum observavi, comes mediocriter distabat orientem versus, eratque ansarum lineâ superior. *fig* 43. Brachia verò prope Saturni discum adaperta ac bifida inveniebam, qualia ante non videram, lineâ quoque obscurâ versus inferiora ulterius promotâ.

Et

Et hac quidem figurâ permansit, donec rursus radiis solis occultaretur.

18 Dec. comes erat in maxima distantia, orientem spectans, & in ipsa ansarum linea. *Tab.* XLVIII. *fig.* 44.

22 Dec. h. 6½ mat. comes non apparuit.

27 Dec. h. 6½ mat. comes occidentem versus in maxima fere distantia situs erat, & ansarum linea paulo altior. *fig.* 45.

Anno 1658. 24 Febr. h. 10, comes videri nequiit.

1 Mart. h. 10, idem comitis situs erat qui 27 Dec.

11 Martii, h. 10, comes difficile conspiciebatur, quippe propinquus admodum Saturno. Orientem spectabat, eratque ansarum linea aliquanto inferior, & quasi sub Saturno transiturus. *fig.* 46.

16 Mart. h. 10 quantum poterat à Saturno comes recesserat occidentem versus, vixque erat ansarum linea superior. *fig.* 47.

23 Martii, in contrariam partem pene tantundem distabat, lineâ ansarum rursus paulo superior. *fig.* 48.

3 Apr. paulo remotior erat à Saturno comes, quam 11 Martii, & occiduum latus tenebat, lineaque ansarum sublimior cernebatur. *fig.* 49.

Anno eodem 1658. 10 Nov. hor. 6½ mat. postquam Heliace ortus esset Saturnus, jam latius aperiri ansæ videbantur, quanquam ob humilitatem sideris, surgentesque vapores, & auroræ claritatem non admodum distinctè poterant discerni: comes occidentem versus adstabat, remotus ut cum maximè, ansarum linea nonnihil tamen superior. *fig.* 50. *Ansæ Saturni amplius patefactæ.*

16 Jan. anno 1659. hora 5½ mane, comes ad occidentem denuo situs erat, non longe à Saturno distans, linea autem ansarum integra fere Saturni diametro superior. *fig.* 51.

12 Febr. 6 mat. tantundem infra lineam ansarum descenderat, occidentalis rursus. *fig.* 52.

Forma verò ansarum distinctè hac vice percipi potuit, quam figura hæc exhibet; atque ea ad ultimam usque harum observationum talis extitit. *TAB. LI. fig. 6.*

24 Febr. hora dimidia post mediam noctem, comes erat in mediocri distantia, orientem versus, rectâ ansarum pau-

lo inferior. *Tab.* XLVIII. *fig.* 53.

25 Febr. horâ eadem orientalis denuo comes cernebatur, una Saturni diametro ab ipso remotus. *fig.* 54.

Comes infra Saturnum transire visus.

14 Martii, hora 12, comes rectà fere infra Saturnum observatus, unius circiter diametri longitudine distans; paulum tamen versus occidentem declinabat. *fig.* 55.

16 Martii, hora 11, ad latus occiduum positus erat, fere in maxima distantia, inferiorque paulo eâ quæ per ansas ducitur. *fig.* 56.

Idem supra Saturnum transiens.

21 Martii, hora 11, rursus ad eandem partem consistebat comes, motu latitudinis integra Saturni diametro supra ansarum lineam elatus, longitudinis motu tantum dimidia diametro distans. *fig.* 57.

22 Martii, horæ quadrante ante undecimam; rursus integra diametro superior erat rectâ ansarum, ac fere supra orientalis ansæ extremam cuspidem collocatus. *fig.* 58.

26 Martii, hora 10½ comes in maxima distantia videbatur; quam accuratè hac vice dimensus, inveni inter comitem centrumque Saturni intervallum trium scrupulorum primorum, 16 secundorum. *fig.* 59.

Hucusque observationes, & plures quidem quam necesse fuerat, recensui; rem gratam tamen iis me facturum ratus, qui triennio isto simul forsitan mecum novo Planetæ observando vacaverint; quibus procul dubio jucundum erit consensum mutuum suarum cum nostris observationibus deprehendere. Jam enim & Hevelius Gedani eum conspicere ante biennium cœpit, ut supra quoque retuli, & in Anglia D. Paulus Nelius eques cum Clarissimo Wrennio ipso jam Anno 1655, sibi animadversum quandoque asserunt, nec tamen Planetam esse cognovisse donec à nobis essent admoniti. Nunc quo pacto periodum ejus investigaverim, quæque porro ad illam pertinent expediam.

Lunæ Saturnia periodus.

Pensitatis priorum aliquot mensium observationibus, cum circiter 16 dierum spatio Saturnum à Luna sua ambiri comperissem; nam quo loco animadversa fuerat 25 Mart. 1655, ad eum sexto decimo inde die rediisse visa est, 10 nimirum

Apr.

Apr. Itemque eodem anno die 3 & 19 Apr. idem situs fuerat deprehensus; nec non 13 & 29 ejusdem mensis. Hisce igitur animadversis, circulum descripsi orbitam comitis referentem, in cujus centro Saturnus esset, atque in partes 16 distribui, uti Schema subjectum exhibet. In eo comitem, secundum signorum ordinem, circumduxi; nulla tum quidem observatione ut ita statuerem cogente, sed quod in eam partem Luna quoque nostra & Jovis comites deferrentur. Postmodum autem stabilita hypothesi, qua phænomena ansarum explicantur, patuit recte ita hunc motum me constituisse. Porro in hoc circulo locum comitis quærendo quo in prima nostra observatione stetisset, sæpiusque eundem retractando, ut observationibus per id tempus habitis congruerent etiam reliqua loca in circulo comiti assignata; ita demum commodissimè repræsentari omnia visum est, si prima observatione, nempe 25 Mart. 1655, ad numerum 12 comes reponeretur, 3 partibus cum dimidia, qualium 16 circumferentia continet à loco perigæo B remotus; nam diametrum AB ad visum nostrum vergere ponimus, & utrasque hujus epicyclii apsides determinare. Fuerit igitur 26 Mart. ad num. 13, Saturni comes: & 27 Mart. ad num. 14, & 3 Apr. ad num. 5, atque ita deinceps iis orbitæ locis quæ observatis primi anni exactè satis conveniunt, quanquam aliquid subinde addendum auferendumve 16 dierum periodo existimaverim. Cum autem scirem etiam orbitæ terrestris, qua nos circa Solem ferimur, ipsiusque Saturni motus rationem habendam esse, si accuratè comitis periodum definire vellem, proinde sequenti methodo eam deinceps investigavi.

TAB. LI. fig. 1.

Bina tempora quæsivi quibus in apogæo vel perigæo comes versatus esset; quorum alterum inveni 14 Martii, anno 1659, vesperi circa horam octavam. Quia enim hora noctis 12 tantum prætergressus erat locum perigæi quantum ex observatione illo tempore habita apparet, oportet eum circiter octavam in perigæo ipso fuisse. Alterum similem comitis situm colligo contigisse die 23 Martii, anno 1656, hora itidem octava post meridiem. Etenim quia die 16 & 30 ejus-

Eadem periodus accuratius supputata.

dem mensis hora 8 p. m. æquali spatio à Saturno remotus apparuit, quibus diebus circa partem suæ orbitæ superiorem versatum constat, sequitur 16 Martii medium locum cum tenuisse inter puncta 1 & 2 circuli modò descripti; 30 verò Martii medium fuisse inter puncta 15 & 16; quoniam 14 dierum intervallum est. Ac proinde necessario perigæus fuit die 23 Mart. post meridiem circa horam octavam.

TAB. XLIX. fig. 1. Cognitis hisce temporibus describo circulum A B C, qui Saturni orbitam designet, itemque G F orbitam Telluris, in cujus centro Sol. Saturni locum sumo ad diem 23 Martii 1656, hora 8 post mer. fuisse in A; quo tanquam centro describo comitis orbitam D E L; Tellurem vero eo tempore fuisse in G. Locus itaque comitis erat in D, ubi recta G A circulum comitis intersecat, siquidem perigæum fuisse constat. Rursus posito ad diem 14 Martii 1659 hora 8. post mer. loco Saturni in B, tellure vero in F; necesse est comitem fuisse in H, ubi recta F B secat circulum ejus N H K. Est autem temporis intervallum inter 23 Martii 1656, & 14 Martii 1659, dierum 1086, quibus Saturnus ab A progressus est ad B: Comitem vero spatio dierum 16 circuitum unum absolvere scio, atque insuper exiguum quid, quod in annis tribus circuitum integrum conficere nequeat. Quum igitur divisis diebus 1086 per 16 fiant 67, atque aliquot dies abundent, apparet 68 circuitus integros nostri respectu comitem peregisse, quia in H rursus perigæus fuit. Sit B K parallela A G. Si igitur 14 Mart. 1659, comes non in H sed in K positus fuisset; sequeretur eum hisce 1086 diebus sexagies octies orbitam suam decurrisse fixarum respectu, hoc est, totidem menses periodicos, sive sidereos potius, Saturni incolis præbuisse. Nam quando rectæ A D, B K secundum quas ex Saturno comes prospicitur, inter se parallelæ sunt, eundem inter fixas locum illis obtinere cernitur. Nunc verò insuper arcum K H emensus est, qui totidem est graduum quot apparenti motu Saturnus inter prædicta duo tempora transivit; quoniam angulus H B K æqualis est ei quem constituunt rectæ F B, G A, motus apparentis indices;

ces; isque motus ex Ephemeridibus invenitur fuisse gr. 40, 48′. Sic itaque colligo; si diebus 1086 absolvit periodos 68, atque insuper gr. 40, 48′, hoc est gr. 24520, 48′, quantum ergo die una? Prodeuntque gr. 22, 34′, 44″, qui motus comitis diurnus est respectu fixarum. Ad mensis siderei longitudinem inveniendam ita calculum instituo; si gr. 24520, 48′ percurrit diebus 1086, quot dies impendet gradibus 360? fiunt dies 15, horæ 22, scr. 39. spatium quo ad eandem fixam Saturni incolis Luna sua revertitur.

Deinde medium motum diurnum à sole (qui minor est motu quo respectu fixarum comes progreditur, ut in nostra quoque Luna evenire novimus) ita reperio; Saturni motum medium diurnum qui 2 est minutorum, aufero ab invento motu diurno respectu fixarum gr. 22, 34′, 44″. unde supersunt gr. 22, 32′, 44″, diurnus motus à Sole. Atque hinc facile quoque mensis Synodici Saturnicolarum media longitudo computatur. Nempe si gr. 22, 32′, 44″, uno die percurruntur, quot igitur diebus gr. 360? Fiuntque dies 15, horæ 23, scr. 13. Reliquis duntaxat 47 scrupulis ad dies 16. Atque illud etiam medium tempus est quo nostri respectu ad apogæum suum Saturni comes revertitur, sive intra quod cum Saturno bis conjungitur. *Mensis Saturnicolarum vera longitudo.*

Cæterum quia ex motu comitis illud præcipue investigari meretur, quo pacto ad datum quodvis tempus situs ejus apud Saturnum exhiberi possit; ostendemus nunc brevissimam ad hoc calculi rationem, sequentium tabularum ope absolvendam; in quibus motum comitis æqualem qualis ex Saturno fixarum respectu appareret, proponimus. Hunc autem diurnum adsumsimus gr. 22, 34′, 44″, sicut modo inventus fuit. Etsi enim expertus sum, iterato eodem examine adhibitisque aliis duobus temporibus quibus comes fuit apogæus aut perigæus, aliquot secundis scrupulis majorem interdum minoremve eundem motum reperiri, istum tamen medium quodammodo inter alios retineri posse ratus sum, post plures abhinc elapsos annos facile emendandum. Nam & inæqualitas puto aliqua, & eccentricitas, quemadmodum in Luna nostra, ita circa hanc quoque, diligenti observatione olim deprehendi poterit.

Tabula motus æqualis Lunæ Saturniæ in orbita sua respectu fixarum.

In Annis Julianis.

	Gr.	Min.
1	321	18
2	282	35
3	243	53
4	227	45
5	189	3
6	150	21
7	111	38
8	95	31
9	56	48
10	18	6
11	339	24
12	323	16
13	284	34
14	245	51
15	207	9
16	191	2
17	152	19
18	113	37
19	74	55
20	58	47

In Mensibus anni Julianis ineuntibus.

Janu.	0	0
Febr.	339	57
Mart.	252	9
April	232	6
Maji	189	28
Junii	169	25
Julii	126	47
Aug.	106	43
Sept.	86	40
Octo.	44	2
Nov.	23	59
Dec.	341	21

Si fuerit datus annus intercalaris, post Februarium unus dies, eoque & unius diei motus addendus est.

In Diebus.

	Gr.	Min.
1	22	35
2	45	9
3	67	44
4	90	19
5	112	54
6	135	28
7	158	3
8	180	38
9	203	13
10	225	47
11	248	22
12	270	57
13	293	32
14	316	6
15	338	41
16	1	16
17	23	50
18	46	25
19	69	0
20	91	35
21	114	9
22	136	4
23	159	19
24	181	54
25	204	28
26	227	3
27	249	38
28	272	13
29	294	47
30	317	22

In Horis.

	Gr.	Mi.
1	0	56
2	1	53
3	2	49
4	3	46
5	4	42
6	5	39
7	6	35
8	7	32
9	8	28
10	9	24
11	10	21
12	11	17
13	12	14
14	13	10
15	14	7
16	15	3
17	16	0
18	16	56
19	17	52
20	18	49
21	19	45
22	20	42
23	21	38
24	22	35

Primo Jan. anno 1653, meridie, distantia Lunæ Saturniæ ab apogæo erat gr. 274. 21'. Saturni locus apparens, eodem tempore in ♌ gr. 11. 41.

Harum

Harum tabularum auxilio primùm Epocham, quæ præcederet omnes obſervationes noſtras, conſtitui diem 1 Jan. meridie, anno 1653. Nempe ex eo, quod 14 Martii, 1659, hora 8 pom. in perigæo Saturni Luna verſaretur, collegi retrorſum numerando, ad prædictam diem 1 Jan. 1653, abfuiſſe illam ab apogæi loco gr. 274, 21′. Jam vero ut ad quodlibet datum tempus, epocha poſterius, inveniatur ejus ab apogæo diſtantia, (namque hinc facile deinde perſpicere eſt quam propinqua Saturno apparitura ſit) *addendus eſt ad motum Epochæ, motus comitis uſque ad tempus datum, ex tabulis collectus; hinc auferendus Saturni motus apparens per idem temporis intervallum, qui ex Ephemeridibus cognoſcitur; reliquum erit diſtantia comitis ab apogæo quæſita.* Ut ſi datum fuerit tempus dies 25 Martii, anno 1655, hora 8 pom. quæ prima noſtra fuit obſervatio: Motus Epochæ, ſive diſtantia Lunæ Saturniæ ab apogæo tempore Epochæ, quæ eſt gr. 274, 21′, addita ad motum ejuſdem Lunæ inde ab Epocha ad tempus datum, colligit gr. 278, 31′; Hinc ablato Saturni motu apparente per idem tempus, qui invenitur gr. 22, 58′, relinquuntur gr. 255, 33′, diſtantia Lunæ Saturni ab apogæo, quæ invenienda erat. Unde apparet in circulo (Tab. LI. fig. 3.), ubi A apogæi locum referebat, fere ad numerum 12 illam conſtitiſſe, eoque in maxima propemodum diſtantia viſam, uti revera contigit. Calculum autem ſubjicimus qui ſic ordinatur.

Locus Lunæ Saturniæ quomodo ſupputetur.

Gra-

	Gra.	Mi.		G. M.
Motus Epochæ,	274	21	♄ Locus app. 25 Mart. 1655,	4 39 ♍
Anni 2	282	35	♄ Locus app. tempore Epochæ,	11 41 ♌
Martii 1	252	9		
Dies 24	181	54		
Horæ 8	7	32	Restat ♄ motus apparens,	22 58
Summa	278	31		
Motus Saturni apparens	22	58		
Reliquum	255	33	distantia Lunæ Saturni ab apogæo.	

Ejus calculi comprobatio. TAB. XLIX. fig. 1.

Ut verò constet methodi ratio, intelligatur in superiori diagrammate, Saturnus die 1 Jan. 1653 positus fuisse in A, terra in G, Luna Saturni in E, gradibus 274, 21′ ab apogæo L. Rursumque 25 Martii 1655, Saturnus ponatur in B, terra in F, Luna Saturni in M: sitque BN parallela AL. Quoniam igitur Lunæ motus periodicus inter bina illa tempora, additus motui Epochæ, hoc est, arcui LDE graduum 274, 21′, efficit gr. 278, 31′; erit idcirco arcus NKM hoc graduum numero. Distantia autem Lunæ Saturniæ ab apogæo est arcus OKM, qui ut cognoscatur, auferendus est ab arcu NKM arcus NO. Ergo cum arcus NO totidem sit graduum atque angulus quem constituunt rectæ OF, LG; hujus autem quantitas definiatur apparenti Saturni motu inter duo prædicta tempora; apparet nos rectè ab inventis gr. 278, 31′, hoc est ab arcu NKM, subtraxisse Saturni motum apparentem gr. 22, 58′ (quippe æqualem arcui NO) ad consequendum arcum OKM, gr. 255, 33′, distantiam nempe Lunæ Saturni ab apogæo.

Nondum hic locus est explicandi alium quendam hujus lunulæ motum in latitudinem, observationibus aliquot præcedentibus jam sese prodere incipientem; quo nempe ab linea recta per ansarum extrema transeunte plerumque exorbitat, apparetque circa Saturnum ellipsin percurrere, interdum quidem satis latam, alias verò angustiorem, & rotundo

do Saturno lucente, in rectam lineam abeuntem. Etsi enim, ad verum lunulæ situm respectu Saturni determinandum, hujus quoque motus ratio est habenda, cum tamen causæ ejus cum cæterorum phænomenôn causis prorsus conjunctæ sint, simul cum illis atque una opera exponendum censeo.

Illam igitur Systematis hujus partem alteram nunc aggredior, in qua formæ Saturni instabilis atque à se ipsa discrepantis ratio reddenda, tum qua periodo singulæ mutationes contingant dicendum est. Harum aliquas quæ nobis sese obtulere supra exhibui; sed eæ partem tantummodo periodi complectuntur. Ideoque ut omnem phænomenôn diversitatem ab iis quas dicemus causis pendere constet, aliorum quoque temporum observationes examinare necesse erit, quas à 40 atque amplius annis complures scriptis prodiderunt. At verò cum Saturni figuras omnes quas nobis delinearunt oculis lustro, eas multiplices adeo ac prodigiosas invenio, ut si qua hypothesis comminiscenda foret quâ cunctis fieret satis, nemo non, ut opinor, in ea excogitanda operam lusurus sit: cum nulla tam crebræ atque enormis transformationis causa esse possit, nisi ponatur ipsam Saturnii corporis molem identidem aliam atque aliam faciem induere, quod ab omni verisimilitudine est alienum. Quamobrem delectus adhibendus est observatis illorum, & inquirendum quænam ex iis fidem mereantur, quæve contra ut suspecta rejicienda sint. Quo in examine illud concedi nobis postulamus, ut quoniam Saturni comitem primi perspicillis nostris deteximus, ac quoties libet clarè intuemur, præferantur propterea nostra hæc illis quibus alii ad stellam eandem nequaquam pertingere potuere, licet quotidie Saturno observando intenti: eoque nostræ etiam circa formam planetæ observationes veriores habeantur, quoties eodem tempore nobis atque illis diversæ phases animadversæ fuerint. Adjuncta itaque tabella omnes eas exhibet quas ex variis autoribus descripsimus. TAB. LII.

Ac prima quidem harum formarum est quam Galilæus ad- *Hæ singulæ examinantur.*

TAB. LII. fig. 1. notavit anno 1610, in qua triceps Saturnus ſpectatur, minoribus duobus orbiculis majori utrinque adjacentibus. Hanc alii quoque permulti viderunt, aut certè ſe vidiſſe crediderunt. Nam ſi grandiores tubos adhibuiſſent atque optimis vitris inſtructos, haud dubiè pro triplici hac globulorum facie eadem ſeſe illis obtuliſſet quam nobis diximus anno 1655, ac rurſus anno inſequenti, die 13 Oct. viſam. Hoc enim inde colligimus quod dum illis bini ad latera globuli apparenr, nobis porrecta in longitudinem brachia tubi noſtri referunt; uti contigit eo ipſo anno 1655, menſe Aprili ac Majo, quo tempore triſphærica illa figura Ricciolo Hevelioque obſervata fuit. Etenim quo certius conſtet ob perſpicillorum parvitatem talem hanc cerni, experimur nobis quoque, quoties breviori perſpicillo, quinûm puta aut ſenûm pedum, Saturnum aſpicimus, binos globulos dictorum loco brachiorum apparere; etiam illâ anni 1658 jam exiſtente phaſi.

Quænam autem fallacis imaginis cauſa ſit facile perſpicitur. Quippe enim quum circa extremas cuſpides ampliorem lucem brachia hæc ſive alæ emittant, quam qua parte medio Saturni diſco adhærent, ubi ſemper umbræ aliquid intercedit, non modo cum manifeſto jam bifida evaſerunt, velut anno 1658, ſed antea quoque ut anno 1657; non mirum eſt lucem illam intenſiorem, debiliori interjecta, penitus à medio orbe ſeparatam videri. Neque item rotundam ex oblonga fieri mirandum eſt, cum idem accidat omni figuræ eminus, nec ſatis diſtinctè ob exilitatem, perceptæ, atque eo magis quo fuerit lucidior. Itaque plane conſtat teleſcopiorum culpa phaſin hanc vitiatam eſſe, licet obſervatores bona fide eam tradiderint.

TAB. LII. fig. 2. Quæ ſequitur hanc nihilo melius ſe habet, à Scheinero obſervata anno 1614 Atque equidem dubito, perfectioribuſne an deterioribus perſpicillis, quam qui præcedentem dederunt, hanc deprehenderit. Quoniam hactenus quidem ad veram magis accedit, quod affixas Saturno auriculas exhibet; at contra in eo aberrat, quod plus juſto earum contra-

tra-

trahat longitudinem. Hæc autem phaſis tum ſibi ipſi tum ſuperiori fidem derogat, alterutram certe haud veram fuiſſe arguit; quoniam eodem tempore, anno nimirum 1614, altera à Scheinero, altera à Galilæo aliiſque obſervata perhibetur. Ut proinde dubitandum non ſit, quin & hæc ſimilis extiterit ei quam nos anno 1657 vel 1658 in commentaria retulimus. Neque aliud de tertia hujus tabellæ exiſtimandum TAB. XLII. eſt, quæ Ricciolo ſecunda ponitur, quamque anno 1640 & fig. 3. 1643 obſervatam ſcribit. Veritati tamen propior hæc videri poteſt, quod pro orbiculis oblongas atque olivæ ſimiles figuras habeat.

Quarta eſt quam in locum triſphæricæ formæ Heveliusad- fig. 4. ſumſit in libro *de Saturni nativa facie;* ubi ſecundum leges hypotheſeos ſuæ aſſerit talem quandoque cerni debere, quæ tamen ex viſus hallucinatione in triſphæricam degeneret. Quanquam mihi ne iſtiuſmodi quidem forma ſatis convenire hypotheſi illius videatur, ut poſtea oſtendemus.

Ejuſdem Hevelii etiam quinta eſt, cui ſimilem Gaſſendus fig. 5. edidit. Et hæc quidem ſatis prope cum noſtra illa anni 1658 conſentit, niſi quod partes brachiorum tenuiores, qua medio diſco adnectuntur utriuſque tubi non ſint aſſecuti.

Idemque in 6 & 7 contigit, quæ ambæ ab Hevelio quo- fig. 6. 7. que traduntur, ſimiles iis quas circa eadem tempora Ricciolus obſervavit, nimirum anno 1648, 1649 & 1650, quæ hic octavo nonoque loco exhibentur. Neque alia re differunt, fig. 8. 9. quàm quod medius orbis Hevelio nonnihil oblongus apparuit, cum Ricciolo rotundus fuerit: quodque hic connexas anſas cum inter ſe tum Saturno ipſi ſpectaverit, quæ Hevelio pauxillo à contactu abeſſe viſæ ſint. Verum ipſe Hevelius cauſam cur ſeparatæ videantur viſus imbecillitati adſcribit, cum alioqui reipſa cohærere eas Saturno ſtatuat.

Tales autem & Euſtachius de Divinis notavit anno 1646, fig. 10. 1647 & 1648, à quo editum ſchema ad num. 10 hic exhibuimus. Iſque cum præſtantiſſimus perſpicillorum artifex habeatur, credibile eſt omnium emendatiſſimè nativam Saturni faciem nobis deſcripſiſſe, niſi quod umbras illas quæ in

ſchemate apparent, de ſuo, ut opinor, adjecit.

TAB. LII. fig. 11. Porro ab hiſce figuris non multum recedit ea quæ à Fr. Fontana vulgata fuit, undecima tabellæ noſtræ. Quam quidem & Ricciolus anno 1646 ſibi viſam ſcribit. Sed minus bonis teleſcopiis tunc uſum crediderim, quam quibus modo dictas octavam nonamque detexit. Siquidem eodem anno 1646 ſeptimam formam ſe vidiſſe teſtatur Hevelius, cui potius hic ſtandum eſt. Nam Fontanæ obſervationes quominus in dubium vocare verear facit, quod etiam olim magis monſtroſas formas Martis publicavit, veluti trilateræ cujuſdam rupis, ac rurſus aliter cum nigra in medio orbe macula; quæ nos cum aliis multis fabuloſa comperimus. Hæc tamen, quam in Saturno prodidit formæ diverſitatem, neque magna eſt, ut dixi, neque miranda.

fig. 12. 13. Plus negotii poſteriores duæ, duodecima decimatertiaque, exhibituræ videntur: quarum priorem præter Blancanum etiam Gaſſendus prodidit; reliquam Ricciolus, aliunde tamen acceptam, nobis impertiit. Mirabilis præſertim illa Gaſſendi apparet. Verumtamen ſi bene perpendatur, facile eſt intelligere, quo pacto ab nona figura hæc defluxerit. Nam ſi tantum in locum rotundarum lacunarum, lunatæ ſubſtituantur, cornibus ſeſe mutuo reſpicientibus, jam profecto nona illa exiſtet, quam Ricciolus adnotavit. Nihil mirum autem Gaſſendo ac Blancano, cum non magnis perſpicillis uterentur, rotundas potius eas maculas quam lunularum forma apparuiſſe, ſiquidem partes harum acuminatas diſtinctè percipere illis negatum fuit. Tertiadecima denique quam Ricciolus à Fontana, itemque ab aliis Romæ viſam memorat, anno 1644 & 1645: eam quoque pro octava ac nona ſuppoſitam eſſe certum eſt, vel etiam pro ſeptima quam Hevelius prodidit. Non ſolum enim Ricciolus hanc ſibi unquam oblatam negat, ſolas octavam, nonamque cum anſis ſe vidiſſe affirmans: ſed & eodem anno 1645 Heveliano teleſcopio ſeptima illa conſpecta fuit. Nempe anſas Saturno conjungi rectè hìc Fontana animadvertit; ſed cum præcipuus earum ſplendor à parte gibba procederet, orbicularem ibi figuram conſtituere viſus eſt.

Non

Non adſcripſi phaſibus hiſce eam qua Saturnus ellipſis formâ conſpectus dicitur, abſque illis comitibus brachiiſve; quoniam ſatis conſtat ob exilitatem teleſcopiorum, in ipſo inventi hujus exortu, talem apparuiſſe; poſtquam verò ad majorem perfectionem eadem adducta ſint, neminem amplius ſolitarium Saturnum vidiſſe niſi ſimul & rotundus fuerit.

Non eſſe alteram anſarum quandoque altera minorem.

Omiſi etiam phænomenon aliud à nonnullis quidem relatum, ſed vanum proculdubio atque à ſola imaginatione profectum: quo nempe alterum quandoque Saturni ſive comitem ſive anſam altera minorem deprehendi aſſerunt. Ego vero exiſtimo non tam ab indiſcreta perceptione phaſin hanc enaſci (cur enim hanc anſam potius quam illam minorem dicerent?) quam quod ubi hypotheſin quiſpiam commentus fuerit, ex qua talem prodire neceſſe ſit, facile ſibi ipſi imponat, quodque cupit evenire credat. Itàque viro eximio J. Hodiernæ qui ad nos è Sicilia Syſtema ſuum Saturnium, de quo pluribus mox agemus, miſit, accidiſſe reor. Hic enim anno 1655 & ſub finem anni inſequentis, orientalem globulum reliquo minorem ſibi apparuiſſe ſcribit, quum tamen eodem tempore, nobis inſpectantibus, eadem utrique magnitudo, claritas ac figura adfuerit, non quidem orbicularis, ſed rectà in longitudinem utrinque à Saturni diſco procedens. Quin etiam fruſtra cauſam hujuſce rei ex hypotheſi ſua adducere Hevelius laborat, quum planè contrarium ex ea ſequatur, perpetua videlicet utriuſque anſæ æqualitas. Nam cum faciem Saturni nativam ejuſmodi fingat, qualis ſuperiori tabella ad numerum ſeptimum exhibetur, utrâque ſcilicet anſâ pari formâ ac magnitudine corpori medio adnexâ, non ſinunt ullæ opticorum leges, ut qualicunque hujus corporis converſione, aliter una atque alia anſa ſeſe videndam nobis præbeat. Nobis, inquam, in tam immenſa poſitis diſtantia. Cum enim 3000 fere diametris Saturni maximis ab eo remoti ſimus, quo pacto exiſtimat vir Clar. nos percepturos diſcrimen angulorum quibus propior remotiorque anſa ſpectari debeat?

TAB. LII. fig. 7.

Non etiam unamquam.

Æquè parum rationi conſentaneum eſt quod, ob eandem il-

alteram citius ad medium Saturni corpus applicari. illam distantiæ differentiam, unam ansarum citius quam alteram cum medio disco coalescere posse existimat. Hoc enim, admissa licet Heveliana hypothesi, atque etiamsi centuplo præstantiores tubos haberemus, nequaquam tamen nobis visu deprehendere liceret. Cæterum & hujus sententiam viri solertissimi, quo certè nemo hac tempestate majori animo atque industria rem promovet Astronomicam, pluribus exponere, & aliorum insuper de propria Saturni forma opiniones, priusquam nostram adferamus, recensere placet, quas post editam de Luna Saturni observationem omnes accepimus. Hevelius igitur, in eo libro quem peculiarem huic argumento dicavit, causas phænomenôn redditurus, sphæroidis oblongi figuram medio corpori Saturni tribuit, cui ab utroque latere appendices istæ, ut jam dixi, brachiorum sive ansarum forma, firmiter adhæreant, quemadmodum supra 7 loco expressimus. Porro simul cum Saturno hasce ansas, spatio 30 circiter annorum, circa minorem sphæroidis axem converti facit, qui quidem axis plano orbitæ Saturni sit ad angulos rectos. Enimverò his positis septimæ quidem superioris figuræ phasin nec non rotundam quoque repræsentari certum est: ut nimirum in duobus eclipticæ locis oppositis ansata hac facie Saturnus apparitūrus sit, aliisque rursus duobus rotundus ansisque prorsus exutus. Quinimo & sexta ac quodammodo quinta quoque exhiberi possent, nisi quod conjunctæ cum medio disco ansæ videri debebant. Sed quarta phasis nequaquam ab eadem forma proficisci poterit. Nam cum ponatur Saturnus cum annexis sibi ansis, qualem 7 figura ostendit, rectus consistere ad planum eccentrici sui, atque ita perpetuo manere, licet circa axem proprium vertatur; eveniet quidem ea conversione, ut paulatim arctius ad medium orbem ansæ applicentur, veruntamen semper geminas lunas referent ejusdem cum dicto orbe altitudinis, minimeque in tam compressas formas abibunt. Nam quod hoc efficere posse declinationem Saturni orbitæ ab ecliptica Vir Cl. censet (ita enim mihi respondit cum difficultatem hanc ei movissem) si diligentius rem expendat in-

Hevelii hypothesis circa ansas Saturni examinatur.

TAB. LII. fig. 7.

intelliget fieri non poſſe, cum Saturni orbita tantum 3 gradibus ab eclipticæ plano recedat, ut inde anſarum figuris ulla nobis percipienda mutatio adveniat. Cæterum nec veram quidem eſſe hanc quartam phaſin ſuperius indicavimus, ſed cum hæc, ſive triſphærica potius, minoribus teleſcopiis cernitur, noſtris prægrandibus illam comparere quam adnotavimus anno 1655 & 1657. Quæ cum adhuc minus Hevelianæ hypotheſi conveniat, clarius demonſtrat illam ſcopum non attigiſſe. Neque ſanè vel rotundæ phaſis phænomena ſatis congruunt præſtitutis ab Hevelio limitibus; ut patet non tantum ex prædictione ejus, eventu refutata, quæ ferebat rotundam phaſin anni 1656 continuatum iri uſque in Menſem Septembrem anni 1657, cum tamen jam inde à 13 Oct. 1656, anſas Saturnus recuperaverit, neque poſtea amiſerit; ſed & ex Galilæi obſervatis circa rotundam phaſin anni 1612. Solſtitio enim hujus anni, Saturnus gr. 18, 22′. ♓ obtinens, tricorpor adhuc Galilæo apparuit, quum per tabulas Hevelii debuiſſet rotundus obſervari, ac viciſſim 1 Dec. ejuſdem anni 1612, cum verſaretur in gr. 11. 27′. ♓ rotundus Galilæo repertus eſt, quo loco Hevelius triſphæricum expectaſſet.

Cauſa phænomen n Saturni à Robervallio excogitata.

Alteram hypotheſin, ingenio ſuo acutiſſimo dignam, ſummus Geometra E. Robervallius nobis expoſuit. Qua quidem Saturnum perinde ut cæteros planetas rotundum ſtatuit; egredi autem è Zona ejus torrida, hoc eſt, quæ rectiores ſolis radios excipit, vapores quoſdam non admodum ſpiſſos, qui procul à ſuperficie ejus in ſublime evolantes, undique illum ambiant, præterquam polos verſus, ubi fortaſſis intenſum frigus eos à ſole attrahi prohibeat. Hi ſi quando omne ſpatium complent à Saturno ad uſque extremam ipſorum regionem, elliptica forma, inquit, eum videri faciunt. Cum vero minus denſi exoriuntur, interque eos ac Saturnum locus ingens medius relinquitur, ob tenuitatem ſolares radios non reflectunt, niſi inde ubi magis conferti iiſdem opponuntur; quod noſtri reſpectu neceſſe eſt fieri in partibus à medio diſco Saturni remotioribus. Ubi pro-

proinde ansarum formam ex ea reflexione produci oportet, illasque inter ac Saturnum spatia utrinque obscura vel certè minus lucida intercedere. At quoties nullæ prorsus hujusmodi exhalationes ascendunt, rotundus planeta spectabitur.

Equidem rectè hoc consideravit vir sagacissimus esse aliquid quod æqualiter undique Saturnum circumdaret; suadente scilicet periodo Lunæ Saturniæ dierum 16, etiam ipsum circa axem suum, & breviori tempore, conversiones facere; ex quibus conversionibus intra paucos dies diversas phases nasci oporteret, nisi undique eodem modo materia quædam circumposita esset. Nec dissimili collectione usi fueramus dum nostrum Systema effingeremus, ut postea dicetur. Verumtamen ex illa sua hypothesi neque phasis nostra anni 1655 & 1657, satis commodè exponitur, neque certis Saturni orbitæ locis phases quæque peculiares sunt, quod tamen ita se habere observationes omnes evincunt, & rotundi Saturni inprimis. Hæ enim in duobus oppositis Eclipticæ locis accidere animadversæ sunt, contraque in iis qui quadrante hinc distant, ansæ quam maximè expansæ: cum tamen causa non appareat cur aliis quidem orbitæ partibus nullos vapores Sol è Saturno, aliis maximam eorum copiam extracturus sit. Deinde vapores isti, nescio quam bene, at multum certè dissimiles nostris hisce qui terram ambiunt ponuntur, tum quod immenso spatio, prout hi solent, à Saturno ascendant, tum quod versus polos paucissimi aut nulli sint, cum circa terræ polos plures contra atque altiores existant quam circa Zonam torridam. De elliptica autem forma Saturni diximus supra, eam revera nunquam talem cerni, ut proinde causam ejus adferre superfluum fuerit.

Hodierna Siculi circa eadem phænomena opinio.

Nunc verò tuam quoque Hodierna doctissime sententiam excutiamus, quam novo nuncio meo de Saturni Luna & promisso Systemate excitatus, subito publicam fecisti. Meretur tuus ille in hæc studia non vulgaris amor, ut melioris notæ telescopia tibi suppeditentur, qui qualibuscunque etiam instructus, non cessas in cælum quà licet eniti, summum-

mumque illum planetarum, formarum varietate omnes frustrantem, certis legibus astringere aggressus es. At ille te quoque ut opinor delusit. Nam si posthac ea facie se tibi offerat, qua mihi anno 1655 & 1657 apparuit, vel ea quoque quæ successit anno 1658, cognosces utique has non quadrare illi quod tibi finxisti corpori. Sphæroidi nimirum, cujusmodi aut ovum aut prunum est, sed magis etiam oblongo quam Hevelianum illud, similem Saturnum imaginaris; in quo binæ utrinque sint maculæ lucis expertes, quales in tabula superiori phasis octava exhibet, quæ nobis interstitia illa inter ansas Saturni mediumque ejus discum referant. Inde conversiones hujus corporis circa axem, eadem periodo qua & Hevelius, definis; & rotundum tunc videri asseris, cum longior sphæroidis axis ad nos dirigitur, ideoque bis hoc accidere annorum 30 decursu. Verùm enim cum prorsus rotundus ac orbe integro lucens appareat Saturnus, quoties brachiis suis nudatus est, expendendum tibi amplius relinquo, qua ratione lacunas quasdam expleas quas à maculis illis nigris superfuturas rectè ipse prævidisti. Præterea & phases illas te considerare velim quas hæc tua hypothesis non potest non producere, nec à quoquam tamen observatæ perhibentur. Quas ut facilius omnes coram inspicias, ovum aut aliud quod eam formam habeat, istis maculis ornatum, tibi proponito, atque ita ut Saturnum converti vis circumducito; videbis non pauca in tuo hoc Saturno phænomena quæ cælestis Saturnus nunquam exhibuit, atque alia rursus, quæ inesse huic certo tibi affirmare audeo, non videbis, ipséque de Systemate tuo statues.

TAB. XLIX. fig. 6. 7.

TAB. LII. fig. 1.

Quod autem rei veritatem neque tu neque illi viri egregii, quorum antea opiniones recensui, assecuti sitis, minimè mirandum est, aut vobis imputandum, utpote ad quos falsa plurima pro veris phænomenis delata sint; alia vero quæ de Saturno citra visus fallaciam observantur, non pervenerint. Quæ si nobiscum aspicere vobis contigisset, eadem inde quæ nos de nativa Planetæ forma collecturos fuisse credibile est. Me vero præter phases illas synceriores, etiam Lunæ Saturniæ

niæ motus jam inde à principio animadversus, non parum hîc adjuvit; siquidem ex hujus circa Saturnum gyratione, prima mihi spes de constituenda hypothesi affulsit. Quæ cujusmodi sit deinceps explicare aggredior.

Nostra hypothesis qua ratione excogitata.

Quum ergo 16 dierum periodo circumferri Saturno planetam novum comperissem, haud dubiè minori etiam temporis spatio Saturnum in sese super axem suum revolvi arbitratus sum. Namque antea quoque, in eo cum Tellure hac nostra cæteris primariis Planetis convenire, semper credidi, quod singuli in se ipsis rotentur, atque ita tota eorum superficies lumine solis per vices gaudeat. Quin imo in universum ita cum magnis Mundi corporibus comparatum esse, ut illa quibus alia minora circumferuntur, ipsa quoque in medio posita minori tempore circumeant. Ita enim Solem diebus 26 circiter in se redire maculæ ejus declarant: circa Solem vero Planetarum singuli, inter quos Tellus quoque reponenda est, prout quisque remotior est ita tardius cursum conficiunt. Rursus Tellus hæc diurno spatio gyratur, quam Luna menstruo motu ambit. Jovis autem Planetam quatuor minores, hoc est, totidem Lunæ circumstant, eâdem hac lege, ut propiores quæ sunt, celeriore cursu ferantur. Unde Jupiter quidem breviori forsitan tempore quam 24 horarum converti censendus est, cum citima ei lunularum minus biduo impendat. Quæ omnia cum pridem cognovissem, Saturno quoque jam tum similem motum inesse judicabam. De celeritate autem periodi, comitis sui observatio me certiorem fecit. Qui cum 16 diebus orbitam expleat, Saturnum in centro orbitæ situm, multo frequentius circumagi arguit. Jam verò & hoc credibile videbatur, omnem cælestem materiam, Saturnum inter comitemque ejus interjectam, eidem motui obnoxiam esse, hoc pacto ut quo Saturno propinquior est, eo magis ad ipsiusmet celeritatem accedat. Unde illud sequebatur denique, etiam appendices sive brachia Saturni, vel medio globoso corpori conjuncta atque affixa, simul cum eo volvi, vel, intervallo aliquo discreta, non multò tamen lentiorem periodum sortita esse.

Fi-

Figura porro brachiorum, dum hæc circa motum eorum mente agitabam, cjusmodi apparebat, qualis in superioribus obſervationibus anni 1655 expreſſa eſt. Nempe medium Saturni corpus omnino rotundum erat, brachia vero utrinque ſecundum eandem rectam lineam protendebantur, velut ſi axe quodam medius planeta trajiceretur, quanquam tubo illo 12 pedum quo tunc utebar, utraque verſus extremas cuſpides paulo craſſiora clarioraque videbantur, quam ubi mediæ ſphæræ cohærebant, ut indicat figura. Quum itaque quotidie eandem hanc ſpeciem præ ſe ferret, intellexi id alia ratione fieri non poſſe, ſiquidem tam brevis eſſet Saturni eorumque quæ illi cohærent circuitus, niſi ut globus Saturni à corpore alio æqualiter undique cinctus poneretur, atque ita annulus quidam medium eum ambiret. Hinc enim, quacunque celeritate circumvolveretur, eandem ſemper faciem nobis oblatum iri, ſi nimirum axis ad iſtius annuli planum erectus eſſet.

TAB. XLVII. fig. 6.

Annulo Saturnum cingi.

Et ſic quidem ei quæ per id tempus aderat phaſi cauſa ſua conſtabat. Ergo deinceps expendere cœpi anne reliquæ etiam, quæ de Saturno ferebantur, eidem annulo imputari poſſent. Hoc autem non tardè ſucceſſit ex animadverſa, per frequentes obſervationes, brachiorum Saturni ad eclipticam obliquitate. Cum enim lineam rectam, ſecundum quam utrinque ea extabant, non ſequi ductum eclipticæ, ſed interſecare eam angulo 20 partibus majore comperiſſem, ſtatui proinde planum annuli quem imaginatus eram tali circiter angulo ad eclipticæ planum inclinari. Perpetua videlicet conſtantique inclinatione, quemadmodum in tellure hac noſtra plano æquatoris contingere notum eſt. Hinc autem neceſſario illud ſequebatur, ut diverſis aſpectibus nunc ellipſin ſatis latam, nunc eandem ſtrictiorem, nonnunquam denique & rectam lineam idem annulus nobis exhiberet. Quod autem anſæ effingerentur, intellexi id inde fieri, quod non arctè Saturni globo annulus cohæreat, ſed pari interſtitio undique ab eo removeatur. Quibus proinde ſic ordinatis, ac præterea adſumta ea quam dixi annuli inclinatione,

Eum ad Eclipticæ planum obliquè poſitum eſſe.

 ne,

ne, omnes mirabiles Saturni facies sicut mox demonstrabitur, eo referri posse inveni. Et hæc ea ipsa hypothesis est quam anno 1656 die 25 Martii permixtis literis una cum observatione Saturniæ Lunæ edidimus *.

* vide supra pag. 523.

Erant enim Literæ aaaaaaa ccccc d eeeeeghiiiiiii lllllmmnnnnnnnnnoooopppqrrsttttttuuuuu *; quæ suis locis repositæ hoc significant, *Annulo cingitur, tenui, plano, nusquam cohærente, ad eclipticam inclinato.* Latitudinem vero spatii inter annulum globumque Saturni interjecti, æquare ipsius annuli latitudinem vel excedere etiam, figura Saturni ab aliis observata, certiusque deinde quæ mihi ipsi conspecta fuit, edocuit: maximamque item annuli diametrum eam circiter rationem habere ad diametrum Saturni quæ est 9 ad 4. Ut vera proinde forma sit ejusmodi qualem apposito schemate adumbravimus.

* vide pag. 526.

TAB. XLIX. fig. 2.

Occurritur iis quæ de annulo objici possent.

Cæterum obiter hic iis respondendum censeo, quibus novum nimis ac fortasse absonum videbitur, quod non tantum alicui cælestium corporum figuram ejusmodi tribuam, cui similis in nullo hactenus eorum deprehensa est, cum contra pro certo creditum fuerit, ac veluti naturali ratione constitutum, solam iis sphæricam convenire, sed & quod annulum hunc solidum ac permanentem (talem enim arbitror) Saturno ita circumponam, ut nullis compagibus retinaculisve ei cohæreat, ac nihilominus æqualem ab omni parte distantiam servet, unàque cum Saturno motu velocissimo transferatur. Hos autem reputare illud oportet, non ex mera inventione atque arbitrio meo hanc me fingere hypothesin, sicut Astronomi suos epicyclos, nusquam in cælo apparentes; sed oculorum sensu, quo nempe reliquarum rerum omnium figuras dignoscimus, hunc quoque annulum satis evidenter me percipere. Neque verò causam esse cur corpus aliquod inter cælestia hac forma præditum existere nequeat, quæ si non sphærica at saltem rotunda est, atque ejusmodi ut motum circa centrum æquè commodè atque ipsa sphærica suscipiat. Nam minus utique mirandum, hujusmodi figuram tali corpori tributam, quam inconcinnam

quam-

quampiam miniméque tornatilem. Porrò quum certo satis colligi posse videatur, ob similitudinem ac cognationem magnam quæ Saturno cum Tellure nostra intercedit, illum perinde ut hæc in medio sui vorticis situm esse, centrumque ejus versus omnia naturâ suâ tendere quæ illic gravia habentur; inde necessario quoque efficitur, annulum istum omnibus sui partibus æqualivi ad centrum nitentem, hoc ipso ita consistere, ut undiquaque pari intervallo à centro absit. Planè sicuti quidam contemplati sunt, quod si continuum fornicem per totum terrarum ambitum exstrui possibile esset, is absque ullo fulcimine semet ipsum esset sustentaturus. Ergo tale quid in Saturno reipsa effectum esse ne protinus absurdum credant, sed suspiciant potius infinitam naturæ potentiam & majestatem, quæ subinde nova suorum operum specimina in lucem promens, plura etiam superesse admonet. Verum ad propositum jam revertamur.

Diximus brachiorum lineam anno 1655 eclipticæ occurrere visam angulo partium plus minus 20. Quod cum præcipuè faciat ad phænomena ex hypothesi nostra deducenda, antequam ad illa accedamus, ita se habere ex observationibus ostendendum est. *Saturni major diameter Æquatori parallela ostenditur.*

Cum igitur 25 Martii, anno 1655, Saturni in A positi ad stellam fixam B ea fuerit constitutio quæ hîc adnotata est, ut constat ex superioribus observationibus; die autem sequenti, sicut in D & B, tertioque item die sicut in C & B, ita ut quotidie linea ansarum producta altius supra stellam B ascenderet; hinc perspicuum fit viam Planetæ A C nequaquam congruere directioni ansarum, sed diversam ferri angulo A C E, quem 20. gr. majorem invenio. Eo autem tempore nihil admodum mutabatur latitudo Saturni apparens, unde constat viam A C eclipticæ parallelam fuisse; ac proinde eodem illo 20 gr. angulo etiam ab ecliptica lineam ansarum deflexisse. TAB. XLIX. fig. 3.

Rursus 9 Apr. & tribus sequentibus continuè diebus ad aliam fixam C talis annotatus fuit Saturni positus qualis in L, M, N, O cernitur. Ubi similiter apparet, lineam an- TAB. XLIX. fig. 4.

 sa-

ſarum OP, Saturni tramitem LO ſecare angulo LOP, qui 20 plus minus graduum deprehenditur. Eclipticam verò vel eclipticæ parallelam lineam RQ, angulo PQR, paulo etiam majore quam LOP, quoniam decreſcebat per eos dies Saturni latitudo, quæ borea erat.

TAB. XLIX. fig. 3. Denique cum poſt ſtationem Saturnus ad fixam eandem C revertiſſet, factuſque eſſet auſtralior, die 27 Maji, eo poſitu juxta hanc adſtabat quo hìc ad S deſignatus eſt. Die vero Maji poſtrema, eo qui ad T. Ita ut hic quoque linea SV, quæ ſecundum brachia ducitur, interſecet ST, quam quatriduo illo Saturnus permeaverat, angulo VST, 20 gradus exiguo ſuperante. Eclipticam vero vel eclipticæ parallelam XY, paulo minore angulo SXY, quoniam minuebatur adhuc continuè Planetæ latitudo, etſi directus jam incedebat.

Et his quidem intellectis, inclinatio brachiorum Saturni ad eclipticam, in dubium vocari amplius nequit, etſi, fateor, non admodum accuratè quanta ſit hoc modo definiri poſſit. Si tamen 21 graduum per id tempus apparuiſſe ponatur, quantam ferè adductæ obſervationes comprobant, ac porro ad locum Saturni, qui tunc fuit, attendamus, inveniemus æquatori planè parallela brachia extitiſſe. Cum enim circa 3 gr. Virginis Saturnus verſaretur, ubi parallelus æquatoris eclipticam interſecat angulo gr. 21. quo angulo etiam brachiorum linea illam interſecabat; manifeſtum eſt hanc ſecundùm dictum parallelum atque adeo ſecundùm ipſum æquatorem incedere debuiſſe.

Cæterum alio nunc irrefragabili argumento eandem hanc brachiorum inclinationem, & cum æquatore circulo paralleliſmum confirmabimus. Suprà in obſervationum Hiſtoria ad diem 13 Octob. anni 1656, adnotatum eſt, motum Saturni, quo cum cælo quotidie defertur, ſecundum ipſam anſarum lineam procedere nobis viſum, non ea die tantum, ſed quotieſcunque exinde idem inquirere libuit: inquiritur TAB. L. fig. 1. autem hoc modo. Teleſcopio ad Saturnum obverſo, eoque intra tubi aperturam, quam hic refert circulus AB, recepto, ita ut primùm in extremo margine conſiſtat, vergatque

que linea brachiorum ad aperturæ centrum, immotum inde tubum sistimus, quo ita manente, mox totam tubi capacitatem A B percurrere Saturnus conspicitur, motu qui cælo tribuitur abreptus, atque exire ad partem oppositam B, quo tendebat brachiorum linea. Quoniam ergo Saturnus, hoc motu suo, circulum æquatori parallelum percurrit, cujus circuli pars est linea A B, manifesto patet brachiorum lineam æquatori quoque parallelam extendi. Hujus vero rei periculum facere licet quoties Saturni observandi facultas datur, neque alia certiori ratione directionem ansarum investigari posse credimus. Non defuere tamen qui diversimode idem examen instituerunt, quorum observationes sententiam hanc nostram comprobant. Nam Galilæus quidem ipse, qui primus phænomeni hujus indicium fecit, non omnino eclipticæ parallelam lineam, in qua Saturni comites positi essent, sibi visam scribit, sed evidenter ab ea deflectere; & fortasse, inquit, æquatori parallela est.

Post hunc vero quicunque rem examinaverunt, omnes hanc ejus conjecturam nequaquam aberrasse ostendunt, & in his Astronomi insignes Gassendus, Bullialdus & Ricciolus; quorum hic stellarum fixarum ope (alia tamen methodo quam qua modo nos usi sumus) non semel illum ansarum cum æquatore parallelismum liquido sibi compertum demonstrat.

Clarissimus tamen Hevelius, suis observationibus confisus, quæ cujusmodi fuerint non indicat, diversam hic opinionem tuetur, contenditque excentrico Saturni parallelam esse brachiorum inclinationem, ut proinde eclipticæ quoque ferè conveniat, non amplius unqnam quam 2½ gr. deflectens: & hoc quidem cum circa nodos intersectionis Saturnus versatur. Quo fiet ut cum in Libræ & Arietis gr. 20, ubi limites statuuntur, positus fuerit, prorsus eclipticam sequatur brachiorum dispositio. At circa hæc loca maximam omnium inclinationem nostræ & aliorum observationes produnt, nam nostræ quidem, Saturno prope libræ signum atque in ipso signo versante, habitæ sunt; aliorum vero quædam *Hevelii de inclinatione ansarum contraria opinio.*

cum

cum non procul ab oppoſito limite diſtaret. Ergo quod & plurium autoritas & propria experientia confirmat, haud cunctanter hac in re amplectemur: Neque vero dubito, quum certam ſemperque obviam obſervandi methodum tradiderim, quin ea adhibita vir veri amantiſſimus priorem ſententiam volens abdicaturus ſit. Illud utique nobiſcum novit, fruſtra ſive hunc ſive alium quemlibet obſervandi modum, ad dirimendam inter nos hanc litem, uſurpari, quando circa ſigna Cancri vel Capricorni Saturnus commoratur, quoniam ibi diſcerni nequit utrum æquatori an eclipticæ parallela ſit quæ per anſas ducitur, eò quod in his locis parallelus æquatoris eclipticam non interſecet ſed tangat. Quamobrem miror etiam quo pacto Ricciolus, obſervationem Grimaldi adferens anno 1650, 18 Martii habitam, quæ probat eo tempore hanc anſarum lineam eclipticæ obliquam incidiſſe, non animadverterit contrarium ejus quod intenderat illa obſervatione evinci: ſi enim tunc, Saturno prope initium Cancri agente, non erat eclipticæ parallela anſarum linea, ne quidem æquatori parallela fuerit, ut conſtat ex modo dictis. Semper autem æquatori parallelam cerni, & aliis multis obſervationibus docuit, & hac ipſa oſtendere voluit. Ergo & experientiæ propriæ & ſententiæ ſuæ, quam veram eſſe demonſtravimus, planè hìc adverſatur. Grimaldi autem obſervatio, quanquam alioqui in hoc negotio verſatiſſimi atque experientiſſimi, vitio aliquo laborare cenſenda eſt; in qua forſitan priore fixa à Saturno contecta, vel ob fulgorem cerni prohibita, aliam deinde teleſcopio detexerit prius non animadverſam, proque eadem illa habuerit. Nos verò, cum parallelam æquatori brachiorum lineam eſſe indubitatis rationibus ſatis jam adſtruxerimus, deinceps ad annuli noſtri hypotheſin hunc ejus ſitum applicemus, indeque phænomenôn cauſas ſingulas derivari doceamus.

Ricciolus ſibi contrarius. lib. 7. Almag. novi.

Ulterior hypotheſeos noſtra explanatio.

TAB. L. fig. 2.

Eſto itaque Saturni orbita, quam 30 circiter annis ille emetitur, ABCD; & in eodem plano (nam exiguæ declinationis gr. 2½ non hic rationem habebimus) circulus FE, orbem magnum ſive telluris orbitam referens, quam an-

annuo ſpatio cum illa nos obimus: inque hujus centro G conſiſtat Sol. Jam ſicuti axem terra habet ſemper ſibi parallelum, circa quem in ſeſe volvitur, ita Saturnus quoque habere ponatur, qui ſit ad annuli ſibi circumdati planum erectus. Adeo ut circa unum eundemque axem gyrentur & corpus Saturni ſphæricum, & annulus, & in eodem annuli plano poſitus Saturni comes ſive Luna. Intelligatur autem Saturni hic axis axi terræ circiter æquidiſtans. Unde & planum annuli plano æquatoris noſtri parallelum erit, ac proinde angulo partium 23½ ad planum eclipticæ inclinabitur. Nam ſic conſtituendum eſſe inde intelleximus quod anſarum Saturni inclinatio æquatori parallela deprehendatur, ut modo demonſtratum fuit.

Nobis itaque in circulo EF circumlatis, varias annuli hujus, à Sole pariter cum Saturno illuſtrati figuras cerni debere perſpicuum eſt, prout nimirum nunc has nunc illas orbitæ ſuæ partes Saturnus peragrabit. Nam eodem quidem orbitæ loco, quacunque tandem celeritate ſuper axem ſuum converti dicatur, diverſas phaſes non exhibebit, quoniam ea converſione ſitum annuli, noſtri reſpectu, nihil immutat, ſed ita demum ſi in eccentrico ſuo ſive orbita ſpatio aliquo progreſſus fuerit. Cumque triginta fere annis ad loca eadem revertatur, hinc neceſſario intra id tempus omnium phaſium viciſſitudinem conſpici neceſſe erit, atque alias quidem bis, alias quater: quas ſingulas nunc expendemus.

Cauſa phaſeos anſarum latiſſimarum. Primò itaque duos orbitæ locos eſſe liquet è diametro oppoſitos, velut A & C, in quibus Saturnus conſtitutus latiſſimas, maximeque omnium diductas anſas exhibeat; cum nimirum à plano per centra Telluris & Saturni acto, atque ad orbitæ Saturniæ planum erecto, annuli quoque planum ad angulos rectos ſecatur, eoque viginti trium circiter partium angulo ſupra planum annuli viſus noſter attollitur.

Cujus phaſeos vera proinde forma, ſecundum ea quæ ſupra circa annulum definivimus, ejuſmodi erit qualis hìc dea- *TAB. L. fig. 1.*

lineata cernitur, majori ellipsis diametro ad minorem se habente fere ut 5 ad 2. Atque hæc ea figura est quam ab Hevelio, Ricciolo, & Eustachio de Divinis, anno 1648, 1649, & 1650 spectatam fuisse diximus. Cujus itaque locum, hinc inter signa ♊ & ♋, inde inter ♐ & ♑ constitui oportere certum est, quandoquidem istis annis signum ♊ Saturnus peragrabat & in ♋ signum transibat. Postea verò accuratius hunc locum latissimè ansarum phaseos inquirentes ostendemus eum cadere in 20½ gr. ♊ & ♐.

Clarior Saturnus propter ansas cernitur.

Illud vero manifestum est, Saturnum, quoties hanc præfert speciem, multo lucidiorem sese intuentibus ostendere debere, quàm dum nullis brachiis auctus est: quum tantundem luminis fere ab hisce emanet, quantum ab toto interiore disco. Atque ita semper quo propius versus Cancri & Capricorni signa accesserit, eo majorem, aut certè splendidiorem, etiam absque telescopio appariturum; quippe annuli ellipsis semper latius se pandente, ut in sequentibus declarabitur.

Lunæ Saturniæ motus apparens ellipticus.

Sed & aliud circa hanc phasin observandum occurrit, motus nimirum insolens Saturnii comitis, qui quidem motus observationibus anni 1659 adnotari jam cæpit, verùm hac latissimâ ansarum phasi existente, omnium evidentissimè ut sese prodat necesse est. Etenim quum eodem plano & annulus Saturni & comitis orbita contineantur, aut certè parum diversis; constat simul cum annulo etiam orbitam hanc latissimam omnium ellipsin nobis explicaturam: eoque futurum ut comes apparente motu altè supra Saturnum atque infra transire conspiciatur, ita ut corpore ejus vel radiis nimium propinquis nequaquam nobis occultetur, quemadmodum aliàs accidere solet. Atque ea quidem ellipsis quam tali motu describere hisce in locis cernetur, longitudinem latitudinis suæ duplam sesqui alteram habere invenietur, sicut & annuli, quam diximus, ellipsis latissima. Verum recedente hinc Saturno sensim angustior ipsa quoque evadet, quippe annuli ellipsi semper similis, adeo ut primum fulgore planetæ transitus comitis conspici prohibeatur, deinde corporis

ris

ris ipsius Saturni ante vel pone comitem objectu. Ita namque observationes anni 1655 & 1657, quo tempore exilia & quam maximè compressa brachia erant, ostendunt comitem etiam in ea recta tunc perpetuo apparuisse quæ per utrumque illorum extendebatur.

Et hac quidem in re dissidet Saturniæ Lunæ cursus ab eo qui in nostrate Luna animadvertitur; siquidem hæc non æquatoris nostri sed magis eclipticæ plano obnoxia est, à quo quinque tantummodo partibus exorbitat.

Quomodo ansarum latitudo sensim contrahatur. TAB. L. fig. 2.

Verum ad Saturni phases revertamur: quo posito ad H vel I, vel ex adverso ad O vel P, paulo angustiorem jam annuli ellipsin, eadem tamen qua prius longitudine nobis aspici oportet, quum supra planum annuli minus altè hoc situ visus noster efferatur. Unde illa phasis exorietur quæ in tabellæ LII. serie octava posita est; vel, minus accuratè perspicere valentibus, ea quæ sexta est efficietur.

Rursus autem eum ad K aut L Saturnus pervenit, vel ad loca hisce opposita N & M, magis adhuc contrahi apparet minorem ellipsis diametrum, quippe magis ex obliquo inspectam. Ut jam ea Saturni facies proditura sit quam nos anno 1658 observavimus (T. XLIX. *fig.* 7.); quæ minus bonis telescopiis excepta degeneravit in illam quæ quinta in tabella LII. recensetur; pejoribus etiam in trisphæricam.

Quomodo parvula videri ansæ desinant.

Deinde cum penè quadrante circuli à latissimæ phaseos loco Saturnus remotus invenitur, velut in Q & R, vel S & T; usque eo ellipsis annuli constringitur, ut si qua adhuc rima supersit visui pervia, ea tamen propter exilitatem & reliqui corporis splendorem conspici nequeat; ac proinde Saturni forma ejusmodi appareat qualem anno 1655 & 1657 nos spectasse supra meminimus (T. XLIX. *fig.* 6 T. LI. *fig* 5), quæ quomodo aliis omnibus hactenus telescopiorum culpâ trisphærica existimata sit, antea quoque ostensum est.

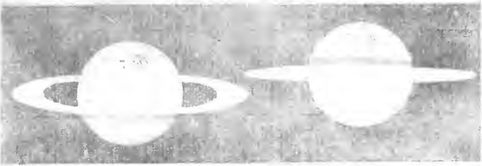
Sola dehinc rotunda phasis explicanda restat; ad quam priusquam transeam, de inclinatione magnæ Saturni diametri, sive ansarum lineæ, ut supra eam vocavi, pauca adnotanda sunt.

Majorem Saturni diametrum necessario Æquatori parallelam semper videri.

Ajo itaque in omnibus prædictarum phasium, posito, ut hactenus fecimus, parallelum esse annuli planum plano æquatoris, necessario fieri ut major diameter Saturni, sive ellipseos ejus cui annulus assimilatur, semper æquatori circulo parallela spectetur, planè quemadmodum revera contingere nostris aliorumque observationibus supra probavimus. Quum enim visus noster respectu cælestium in centro æquatoris circuli, atque adeo in plano ejus collocatus sit, cui plano planum annuli parallelum ponitur, necesse est maximam longitudinem annularis ellipseos eidem æquatori circulo parallelam extendi: eàdem prorsus ratione, quâ, si in aëre plano terræ parallelum circulum suspendamus, oculo nostro altiorem, indeque passibus aliquot retro absistamus, major diameter ellipsis quam suspensus circulus visui offert Horizontis circulo æqui distare comperietur. Hoc enim proculdubio eventurum, cuivis vel citra experimentum intelligitur.

Revera tamen minimum quid nonnunquam aberrare.

Esse autem annuli planum plano æquatoris omnimodis parallelum, etsi observationibus, quas quidem expendimus hactenus, minimè repugnantibus statuere licuit; exiguum tamen quid deesse, quo minus omnino perfectus sit eorum parallelismus, alia ratione deprehenditur. Etenim si prorsus inter se parallela forent utraque plana, sequeretur ut cum in pr. ♈ & ♎ Saturnus spectaretur, omnium arctissima annuli ellipsis, & quasi recta linea existeret, latissima verò in pr. ♋ & ♑. Atqui arctissimam annuli phasium in gr. 20½ ♍ & ♓ cadere invenimus, ut in sequentibus demonstrabitur, ac proinde latissimam in gr. 20½ ♊ & ♐. Non igitur exactè parallela esse plana annuli & æquatoris hinc patuit, ideoque nec semper revera parallelam, licet ita videatur, magnam Saturni diametrum æquatori circulo fore. Quæsitoque per sphærica triangula, quibus in locis & quanta sit maxima inclinatio, inveni eam gr. 4 8'. quando Saturnus in gr. 25, 15'. ♊ & ♐ versatur. Tali nimirum angulo, nec unquam majori, ansarum linea circulum æquatori parallelum per Saturnum transeuntem iis in locis intersecabit; qui cum sit adeo exiguus,



gnus, vix puto observabilis erit: aliis autem locis multo minus. Nam iis quidem quæ quadrante Zodiaci inde absunt, nempe cum gr. 25.15'. ♍ aut ♓ Saturnus obtinebit, prorsus parallela æquatori eadem ansarum linea conspicietur. Eclipticæ vero parallela fiet Saturno gr. 20½ ♊ aut ♐ tenente: quippe quam in locis per quadrantem circuli inde distantibus, nempe in gr. 20½ ♍ & ♓, maximo angulo intersecat. Hunc autem maximum angulum quo linea ansarum eclipticam intersecat esse circiter gr. 23½ observationibus anni 1655, 1656 & 1657 apparuit, talemque ad ista supputanda adsumsimus. Fortasse autem, longo sæculorum lapsu, sensim omnia hæc loca mutari continget, simili quodam motu Saturni globum inclinante atque in Tellure nostra est is qui præcessiones æquinoctiorum efficit: atque ita phasium quoque omnium loca transferri necesse erit. Hoc verò non tam facile in cæteris phasibus quam in rotunda patescet, ad cujus considerationem deinceps veniendum.

Rotunda phaseos causa.

Schema itaque repetenti manifestum est Saturnum integro orbitæ suæ circuitu non posse non ad eum locum bis pervenire, (esto in B & D) ubi planum annuli recta ad nos dirigatur, productumque in oculos nostros incurrat. Quod quidem in locis è diametro oppositis contingeret, inque iisdem perpetuò, si ex Sole Saturni motum prospiceremus; at nunc propter motum Terræ in sua orbita annuum, nonnulla oritur inæqualitas. Annulo igitur secundum latus inspecto, nec nisi rectam lineam referente, quum neutra planarum ejus superficierum appareat, ad nihilum rediguntur brachia ac prorsus intereunt, solo rotundo Saturni corpore quod intueamur reliquo. Cujus phænomeni primum testem Galilæum supra commemoravimus, qui anno 1612 simplicem hanc Saturni formam observaverit. Inde verò post annos 30 Gassendum aliosque complures, ac nos etiam denique anno 1656. Verùm enim si hôc tantum annuli positu ansæ evanescerent, nequaquam tanto tempore perstare rotunda phasis posset atque observationes testantur, toto enim semestri rotundus Saturnus spectatus fuit. Quamobrem porro

ro quærendum est quæ causa, præter eam quam jam attulimus, ansas quandoque cerni prohibeat: est autem quæ sequitur manifestissima.

Frequenter nimirum evenire constat Saturno circa locos modo dictos B vel D commorante, ut tum hujusce tum Solis respectu ita positi simus, ut si produci planum annuli intelligatur, id inter nos ac Solem transiturum sit: velut in schemate, cum Saturnus prope D consistit, nos autem cum Tellure in E. Quo fit ut illam annuli superficiem quæ solis radiis illuminatur conspicere nequeamus, sed alteram tantummodo quæ tunc umbræ vices patitur. Nulla itaque ne hîc quidem brachia Saturno annulus præstat, sed oculis nostris ereptus orbum ac solitarium relinquit. Atque hæc causa ad continuos quinque aut sex menses rotundæ phasi interdum sufficit, uti postea accuratius docebimus.

Quid sit in Saturni disco Zona nigricans.

At non immerito dubitari possit, cur & hôc & præcedenti quoque annuli positu cum planum ejus rectà ad nos vergit, non saltem exterior ejus limbus à Sole illustratus appareat: quid enim dicemus? anne tam tenue esse totum annuli corpus, ut licet revera splendeat extrema ejus margo, exilior tamen ipsa sit quam quæ nostris telescopiis percipi possit? Nequaquam: verùm res eadem quæ causam hanc prætexi vetat, eadem veram causam quoque haud dubiè suppeditat: fascia nimirum illa reliquo Saturni disco obscurior, quam & rotundo illo apparente, & rursus brachiis aucto, nobis visam narravimus. Hæc ita comparatum esse exteriorem illum annuli ambitum evincit, ut aliqua quidem crassitudine præditus sit, verum ejus naturæ, ut solis lumen, vel nihil prorsus, vel certè leviter admodum reflectat. Quia enim in Saturno etiam brachiis prædito tractus iste nigricans animadvertitur, nempe cum superficiem annuli eandem quæ à Sole illustratur despicimus; quo positu nulla ejus regio obumbrata oculis nostris obversa est; sequitur nigredinem illam ex alia causa manare non posse, nisi quod ejuscemodi quadam materia annuli margo cooperta sit, quæ non perinde ut reliqua ejus superficies repercutiendo lumini sit idonea.

nea. Sic in lunari quoque disco maculas aliquas, cæteris partibus multo obscuriores, cernimus; quæ quidem non planè omni luce defectæ apparent, verùm si æquè procul ac Saturnus à Sole distarent, ubi tantum centesimam partem ejus, quod nunc accipiunt, luminis ab illo mutuarentur, credibile est penitus nobis invisibiles fore, nisi quatenus lucidioribus undique terminantur; præsertim si tenuem modo lineam, ut Saturnii annuli margo, constituerent. Alioqui vel illud forsitan dici possit, materiam quandam aquæ similem, aut certè lævi & splendida superficie præditam, extrema annuli præcingere, quæ unicò tantum veluti punćto Solis radios reflectens, nequaquam nobis conspicua erit, ut rationibus opticis clarum est.

Sed quæ ad rotundam phasin attinent ulterius etiam expendamus, in qua plura animadvertenda supersunt. Diximus paulò ante, tunc eam potissimum existere, cum productum annuli planum inter nos Solemque medium transit. Hoc verò quando contingat, quo pacto cognoscere possimus, atque ex Astronomicis tabulis definire, deinceps explicandum est. Sit itaque denuo Saturni orbita ABC, Telluris annua DEF, locus solis L. TAB. I. fig. 4.

Jam quia positum fuit, Saturni axem, qui ad annuli planum erectus est, semper sibi parallelum ferri, sequitur communem quoque planorum annuli & orbitæ intersectionem uni cuidam lineæ semper fore parallelam. Esto ea linea per Solem ducta AC, quæ proinde in cælo locum Saturni æquinoctiorum designabit. Posito igitur Saturno in H, Tellure vero in D, utroque ad partem eandem rectæ AC, verum ita ut minus ab ea Saturnus quam Tellus distet: necessario intersectionis linea planorum annuli & orbitæ Saturni HM, quæ nimirum ex H parallela ducitur AC inter Solem L, Terramque in D positam excurret, ac propterea annuli quoque planum manifestò inter utrumque medium incedet. Quod ubi contingit, rotundæ phasi locum esse demonstravimus. Contra verò, cum Saturnus quidem ac Tellus ad eandem partem rectæ AC consistunt, verum ita

ut

ut illa propius ad eam accedat, ut cum ille est in N, hæc in F: vel cum diversas partes respectu A C obtinent, velut cum Saturnus est in N, Tellus in *f*; utroque casu linea intersectionis annuli atque orbitæ Saturni, ut hic N Q, quæ nimirum ipsi A C æquidistans acta est, Terram Solemque ab eadem parte habebit. Unde intelligitur, utrovis positu eandem annuli superficiem à Sole & nobis aspici: quod requiri jam supra advertimus, ut brachia Saturni aut ansæ apparere possint. Quanquam ne sic quidem semper cernuntur, uti postea manifestum fiet.

Saturnus quando necessario rotundus spectari debeat.

Hi autem diversi situs ut ex tabulis Astronomicis parvo negotio cognoscantur, indeque rotunda phasis, quatenus ab hac causa pendet, prædici possit, sciendum est, quandocunque Saturni locus apparens locusque ex Sole sive eccentricus, diversas partes obtinent ejus loci quem inter fixas designat recta A C, (quam in gr. 20½ ♍ & ♓ incidere post hæc ostendemus) id ejusmodi situm Saturni ac Telluris indicare qualis in H & D, ut nimirum ab eadem parte ambo reperiantur rectæ A C, atque propior huic Saturnus consistat; eoque tunc rotundam phasin conspiciendam dari. Illo enim posito, sit Saturnus in H. Primùm itaque dico ab hac parte lineæ A C etiam Tellurem consistere. Etenim si ad alteram partem sita esse dicatur, velut in P; liquet rectam ex P ad H ductam & versus fixas porro continuatam, quæ locum Saturni apparentem, itemque rectam L H, quæ producta locum ejus ex Sole demonstrat, ab eadem parte puncti æquinoctiorum, quod L A producta inter fixas determinat, utraque ea loca exhibituras; contra quàm positum fuerat. Est ergo Tellus necessario ab eadem parte lineæ A C, qua Saturnus H. Esto jam ea alicubi puta in D. Quoniam igitur D H ad fixas protracta locum Saturni apparentem designat, L H vero, uti diximus, locum ejus eccentricum, inter quæ loca intercedere ponitur locus æquinoctiorum quò tendit L A, necesse est rectam D H tandem ipsam L A interscecare, ideoque punctum D, locum videlicet Telluris, amplius distare à linea A C quam punctum H in quo Saturnus.

mus. Constat itaque quando locus Saturni apparens & eccentricus ad partes diversas cadent loci æquinoctiorum, necessario tunc Tellurem cum Saturno ab eadem parte rectæ A C inventum iri, atque ita ut minus ab ea Saturnus removeatur. At vero quoties apparens locus Saturni itemque eccentricus ab eadem parte habentur rectæ A C, sive loci æquinoctiorum Saturni, inde certo colligi ajo, Tellurem ac Saturnum ita positos esse uti in F & N. Nempe ut vel diversas ad partes ipsius A C collocati sint, vel ad easdem quidem, sed ita ut Saturnus amplius ab ea quam Tellus distet. Ideoque, secundum ante demonstrata, eandem annuli superficiem quæ à Sole illustratur oculis quoque nostris obversam esse. Nam cum L N producta ostendat inter fixas locum Saturni excentricum, F N vero locum ejus apparentem, ac uterque cadere ponatur in partem eandem loci illius quem inter fixas exhibet L C: manifestum est rectam F N ab N porrò productam neque secare debere neque parallelam esse rectæ L C, sed semper ab ea magis recedere. Quare necessario punctum F vel propinquius erit rectæ A C quam punctum N, si sint ambo ad eandem partem dictæ lineæ; vel N ad istam, F ad illam partem situm erit. Quod probandum erat.

Denique advertendum etiam, quando vel Saturni locùs ex Sole, vel apparens locus incidit in alterutrum æquinoctiorum, quæ determinat producta A C, nempe in gr. 20½ ♍ vel ♓, necessario quoque rotundam phasin exoriri. Si enim locus ex Sole inibi reperiatur, hoc est, si Saturnus occupet punctum A vel C, tunc planum annuli protractum per Solem transire liquet: unde sequitur neutram annuli superficiem tunc luce aliqua perfundi. Rursus vero cum locus ejus apparens incidit in dictos æquinoctii locos, hoc est, quando recta à Tellure ad Saturnum extensa parallela incedit ipsi A C; velut cum Saturnus situs est in O, tellus in *f*, eo positu productum annuli planum oculo nostro occurrere constat, quoniam communis ejus intersectio cum plano orbitæ Saturni ipsa est O *f* recta: Unde fit ut neutram superfi-

ciem annuli, etiamsi altera jam illarum Solis radiis splendeat, conspicere possimus.

Quænam Saturnicolis sint loca æquinoctiorum.

Nunc illud videamus, quemnam Eclipticæ locum teneat recta A C Saturni æquinoctiorum linea: quam quidem in ♍ & ♓ gr. 20½ cadere diximus, verum qua ratione id ex observationibus collegerimus declarandum est.

Saturnum brachiis carentem ac prorsus rotundum spectavimus à Mense Decembri anni 1655, usque in Jun. 1656. Quæ phasis ex ea causa, quam modo retulimus, tanto tempore durare potuit, si linea A C eum ipsum locum obtinere ponatur quem & Saturnus tenebat tunc cum Soli esset oppositus, hoc est, ♍ gr. 20. Hinc enim fieri debuit ut toto illo tempore Saturnus ac Tellus ab eadem parte lineæ A C simul consisterent, atque ita quidem ut Saturnus ei vicinior esset; semel autem eodem momento, nempe oppositionis tempore, in ipsa A C reperirentur: unde non nisi rotunda phasis potuit existere, sicut ex prædictis intelligitur.

Cæterum uti non admodum verisimile est (etsi fieri potuerit) eo ipso tempore oppositionem illam contigisse cum Saturnus in æquinoctii sui linea A C situs esset, ita non verebimur hanc lineam dimidio gradu emovere loco illo, atque in gr. 20½ ♍ eam transferre; quum hoc situ melius satisfiat aliis rotundæ figuræ observationibus, anni 1642 & 1612, ac nihilo secius nostra illa anni 1656 conciliari queat, ut ex sequentibus liquebit. Posita itaque A C in gr. 20½ ♍ & ♓ sequitur rotundam phasin, ab usque principio Augusti anno 1642, ad Febr. 1643, continuè perseverasse, prorsus quemadmodum à Gassendo aliisque fuit adnotatum. Erat enim ineunte Augusto locus Saturni eccentricus in 20 gr. ♓, hoc est, dimidio gradu præcedebat locum æquinoctii: at locus apparens in 24 gr. ♓, atque ita gr. 3½ eundem æquinoctii locum transierat. Quare superficiem annuli illuminatam Gassendus nequaquam conspicere potuit, sed eam quæ tenebris tegebatur sibi obversam habuit. Et sic quidem locus Saturni apparens eccentricusque perpetuo diversis in partibus loci æquinoctiorum perstiterunt usque ad initium fere

Febr.



Febr. 1643, unde non nisi rotunda forma prodire potuit, ut antea demonstratum est.

Idem quoque phænomenon anno 1627, proculdubio sese obtulit, sed observatorum penuria an supinitate præteriit inobservatum; cum nemo, quod sciam, prodiderit, utrum Saturnus eo anno cum globulis apparuerit an secus.

Anno autem 1612, à Galilæo primo omnium rotunda facie animadversus est. Scribit is ad Marc. Velserum Epistola de Solaribus maculis 3. circa solstitium quidem illius anni, tricorporem adhuc Saturnum sibi visum, inde verò, cum duobus mensibus atque amplius telescopio eum inspicere omisisset, ut qui nullam formæ mutationem animo præsagiret, postea nihil minus cogitanti solitarium oblatum, talemque deinceps in illam usque diem, quæ prima Decembris erat, permansisse. Quæ quidem observatio hactenus hypothesi nostræ consentit, ut si eo transitu lineæ A C rotundus apparere Saturnus debuerit, id hoc anno neque alio accidere fuerit necesse. Sed cum per totum hunc annum Saturni locus, quà apparens, quà eccentricus, ab eadem parte manserit loci æquinoctiorum, sive ♓ gradus 20½, videbatur ex præcedentibus colligendum, salvis brachiis suis eum præterlabi potuisse, quod tamen contra evenit. Et sexto quidem Septembr. dicti anni 1612, quo tempore jam rotundum Galilæus reperit, erat ejus locus ex Sole simul & apparens, in gr. 14, 44′ ♓. Hoc est g. 5. 46′ citra locum æquinoctii sui. Adeo ut solares radii atque ii qui à visu terricolarum fluebant in eandem annuli Saturnii superficiem inciderent: non tamen angulo g. 5. 46′ desuper in planum ejus directi, sed gr. 2. 15′ duntaxat. Hic enim elevationis angulus, ut hoc obiter adnotemus, sic se habet ad illum gr. 5. 46′, quo Planetæ locus distat ab æquinoctio suo, quemadmodum apud nos declinatio Solis ad ejusdem ab æquinoctio distantiam. Quandoquidem non aliud respectu Saturni est planum annuli sui, atque nobis est planum æquatoris, similique etiam angulo ad eclipticæ planum inclinatur. Proinde cum cognita est distantia loci Saturni eccentrici ab æquinoctio suo,

si scire libeat quali angulo Solis radii in superficiem annuli deferantur; quærendum in tabula declinationis Eclipticæ, qualis apud Astronomos in usu est, quanta sit declinatio loci alicujus qui tantundem à princ. Arietis absit. Ea enim est ipse angulus quæsitus. Ac simili quoque ratione cum data erit distantia loci Saturni apparentis ab æquinoctio suo, hoc est, à gr. 20½ ♍ aut ♓, invenire licebit quonam angulo desuper planum annuli nos inspectemus; qualemque propterea ellipsin ille nobis exhibere debeat. Ex eadem nimirum tabula capiendo declinationem huic distantiæ à pr. Arietis respondentem, quæ declinatio rursus hìc quæsitum angulum æquat. Quorum demonstrationem adferre operæ pretium non est, quippe quam Astronimiæ periti facile perspicient.

Illud verò videndum, qui evenerit ut visu nostro ac Sole simul supra planum annuli plus quam 2 gr. altis, nullum tamen brachiorum apud Saturnum vestigium apparuerit. Anne hæc fortasse causa fuit quod ellipsis annuli, tam obliquè inspecta ut magis tenuissimæ lineæ similitudinem præferret, exiliorem lucem emittebat quam quæ Galilæi tubo percipi posset. Hoc quidem non improbabile videri queat, nisi eodem tubo, circa solstitium ejusdem anni 1612, brachia Saturni sive bini illi, ut tum putabant, satellites Galilæo animadversi fuissent, quo tempore Saturnus observabatur circa gr. 18, ♓. hoc est gr. 2½ ab æquinoctio suo remotus, ideoque visus noster vix uno gradu plano annuli superior. Etenim si hoc positu brachia cerni potuere, multo clarius cerni debuissent tunc cum gr. 2. 15′ supra idem planum visus extolleretur, initio nimirum Septembr. magisque etiam 14 Nov. ejusdem anni 1612, tempore stationis Saturni; quia tunc gr. 11. 10′ ♓ tenebat, eoque gr. 9. 20′ ab æquinoctio suo aberat; adeo ut angulo gr. 3. 42′ radii visus in planum annuli descenderent. Atqui hìc, vel certe circa hæc loca brachiorum expers mansit, quum satis urique diligentem ac intentum observationibus Galilæum fuisse per eos dies credibile sit, qui rotundæ phaseos miraculo nuper esset excitatus. Ita-

Itaque in tenuitatem brachiorum, cur ea penitus latuerint causa conferri non potest. At neque transponendo amplius Saturni æquinoctiorum locum, quicquam proficimus; ne quidem si mobilem statuamus lento quodam progressu, ad similitudinem nostrorum æquinoctiorum, quæ sensim in præcedentia referuntur. Quamobrem non aliam hujus rei causam esse crediderim quam quæ nunc dicetur.

Certum est cognitæque experientiæ, superficiem quamlibet ab eodem lumine plus minusve illustrari, prout directis vel obliquis radiis exposita est: quod & à Galilæo, dialogo 1. de Mundi systemate, optimè est demonstratum. Quamobrem cum exiguo admodum angulo supra annuli Saturnii planum Sol attollitur, puta gradus unius vel duorum vel etiam duorum cum dimidio, hoc est, cum Saturni locus eccentricus non ultra gr. 6. ab æquinoctio suo aberit, etiam prætenui tantum luce annuli superficies à Sole impertietur. Hanc autem, ita leviter splendentem, verisimile est à meris tenebris nos discernere non posse, præsertim Saturnii globi vicino fulgore præpeditos; eoque ansas tunc nullas animadverti. Qua tamen in re illud ante omnia statuere necesse est, superficiem annuli non esse asperam montibusque obsitam, veluti maxima ex parte Lunæ nostræ est superficies: sed æqualem planamque velut in iis Lunæ regionibus, quas nonnulli maria esse ob insignem planiciem arbitrati sunt.

Alioqui enim, sicut Luna plena circa disci sui extrema, ubi tamen obliquos Solis radios excipit, nihilo languidiori lumine quam versus medias partes cernitur, scilicet quia illic tota montosa atque aspera est, ita annuli quoque superficies si simili natura prædita foret, non secus obliquè incidentibus radiis quam directis splendesceret. Quamobrem necessario plana, uti diximus, censenda est. Atque hinc jam intelligere licet cur Galilæo à Mense Septembri anni 1612 usque in Febr. 1613, quoad nempe Heliacè Saturnus occideret, nullæ circa eum ansæ conspicerentur. Quia nempe inde à Septembri continuè locus Saturni eccentricus ad æquinoctii locum appropinquavit, eoque altitudo Solis supra an-

nuli planum, quam initio Sept. tantum gr. 2. 15′, fuisse diximus, simul imminuta est. Pari ratione nec Gassendus brachia ulla percipere potuit mense Febr. anni 1643. etsi tunc quoque Sol oculusque observantis eandem annuli superficiem intuebantur; scilicet quia Saturni locus eccentricus in gr. 26. ♓ inveniebatur, hoc est 5½ gr. à loco æquinoctii, eoque altitudo Solis supra annuli superficiem tantum g. 2. 11′. Denique & anno 1656, mensis Martii diebus aliquot, quibus similiter eadem annuli superficies ad nos Solemque spectabat, multo minus brachiorum ullum vestigium apparere debuit, quod nunquam dimidio gr. supra planum annuli Sol attolleretur. Nam reliquo tempore fulsionis illius, diversas partes loci æquinoctiorum locus Saturni ex Sole atque observatus locus obtinebant, unde ex superius allata causa brachiorum expertem cerni oportuit.

Neque verò magis conspicuum nobis annulum fieri credendum est, si altius supra planum ejus oculus attollatur, Sole tamen ex obliquo tantum radiis suis eum perstringente, quemadmodum contigit dicta Saturni statione ad 14 Nov. 1612; quippe quo tempore Sol gradu 1. 36′ supra planum annuli ascenderat, visus autem noster gr. 3. 53′. Idem enim in quacunqne plana superficie experiri licet, in quam si à latere radii luminis incidant, non apparebit illustrior quocunque in loco visus statuatur, sed tum demum, si radios à lumine rectiores accipiat. Uti contra quoque si amplius ad lumen obversa directiusque illuminata fuerit, non refert quàm obliquè in eam radii visus incidant, sed undecunque spectata æque lucida apparebit. Atque ita fit ut cum Sol paulo altius supra planum annuli sese extulit, tribus puta gradibus aut paulo amplius; visu licet nostro non nisi uno gradu extante; splendere jam nunc annulus incipiat, Saturnoque brachia adnascantur. Sicut anno 1612. circa solstitium accidit, Saturno ex Sole circa gr. 12. ♓, hoc est, gr. 8½ ab æquinoctio suo agente, ac proinde Solis altitudine supra planum annuli graduum 3. 23′: Galilæi verò oculo vix uno gr. supra idem planum elevato. Videbatur enim Saturnus

nus in gr. 18. ♓, hoc eſt 2½ gr. à loco æquinoctii, quæ diſtantia dat declinationem gr. unius.

Ut igitur ſecundum hæc de rotunda phaſi judicium feratur, illud in primis reſpicere oportet, quod gradibus ab æquinoctio ſuo, hoc eſt, à gr. 20½ ♍ vel ♓, Saturni locus eccentricus abſit. Ac mihi quidem phænomena antecedentia expendenti, videtur ita ſtatuendum, ut quoties non amplius quam 6 gr. circiter in alterutram partem, à dictis locis Saturni locus ex Sole diſtabit, nunquam brachia ejus conſpici queant, quicunque demum oculi noſtri ſitus fuerit; hoc eſt, nulla ducta ratione Saturni loci apparentis. Quod tamen ita accipiendum eſt, ſi perſpicillis non melioribus quam quibus Galilæus & Gaſſendus uſi ſunt Saturnus inſpiciatur. Nam ſi noſtris ſimilia adhibeantur, forſitan jam in illa 6 graduum diſtantia tenue quoddam brachiorum exordium percipi poſſit. Certè anno 1656, 13. Oct. renata illa vidimus, cum Saturni locus ex Sole tantum gradibus 6. 46′. æquinoctii ſui punctum prætergreſſus eſſet. Erant autem æquè conſpicua ferè atque ante phaſin rotundam, anno 1655. At ii qui minoribus teleſcopiis eum tunc obſervitabant, ut Joh. Hodierna, penè adhuc rotundum repererunt: ait enim is, tantum tenuiſſimos quoſdam veluti radios utrinque è lateribus Saturnum vibrare viſum. Quamobrem noſtris teleſcopiis fortaſſe arctiores paulò prædicti limites ſumendi ſint; quod tamen minimum quid erit, ſequentiumque annorum experientiâ definiendum.

Saturnus brachiorum expers futurus quo modo cognoſcatur.

Rurſus cum amplius 9. gradib. vel forſan ſupra 8. gr. ſolum, ab æquinoctiis ſuis ſive 20½ gr. ♍ aut ♓ locus Saturni eccentricus diſtare invenietur, jam inde brachiis anſiſve præditum dicemus: nullâ ne hic quidem apparentis loci conſideratione, quoniam hinc jam apparens locus & eccentricus ab eadem parte loci æquinoctialis habentur; ac propterea eadem annuli ſuperficies, per ea quæ ſupra demonſtrata ſunt, Soli & viſui noſtro obverſa eſt, idque ita ut Sol plus tribus gr. ſupra ipſam elevatus ſit, viſus vero noſter ut minimum gr. uno: quo fit ut brachia ſaltem tenuia animadverti debeant.

At

At cum nondum gr. 8 aut 9, plus verò quam senis, eccentricus locus Saturni à 20½ gr. ♍ aut ♓ aberit, videtur etiam apparens locus expendendus esse, nempe circa quadratum quem vocant Saturni cum Sole aspectum. Fieri enim poterit ut non ultra gradus unius semissem locus apparens ab æquinoctii loco remotus sit, ideoque visus noster tantum 12′ super annuli superficiem exurgat; quæ cum à Sole simul debiliter illuminetur, vix puto se videndam præbebit. Quum autem duo contingant quadrati aspectus singulis Saturni fulsionibus, priori eorum ita demum illud quod diximus perpendere opus erit, si locus planetæ ex Sole præcedat gr. 20½ ♍ aut ♓, posteriori verò non nisi sequatur. Nam si secus fuerit jam certo brachiis auctus cernetur.

Et sic quidem quod maximè perplexum in toto hoc negotio inerat, nulla dissimulata difficultate, pertractavimus. Illud enim inquirere voluimus an certis locis rotunda phasis alligari posset, ita ut omnibus huc usque observatis fieret satis. Quod & præstitimus tandem, etsi arctis adeo limitibus circumscripti, ut ne minimum quidem ultra citrave ab iis discedere salvis apparentiis licuerit. Simul verò hoc operæ pretium fecimus, quod de futuris Saturni phasibus haud dubia prænuntiare in posterum licebit. Etenim si modo tabularum Astronomicarum ope inveniatur, quo tempore Saturni locus ex sole sive eccentricus, cadat in gr. 20, 30′ ♍ vel ♓; senis mensibus qui id tempus præcedunt totidemque sequentibus brachia nulla percipi posse manifestum erit; quoniam scilicet in menses singulos gradu uno Planetæ locus ex Sole promovetur. Præterquam quod aliquando uno etiam atque altero mense citius rotunda phasis existet, aliquando tanto diutius videri perseverabit; si nempe quadrante cæli per id tempus Saturnum à Sole distare contingat, locusque Planetæ eccentricus, ea qua diximus lege, præcedat vel sequatur ♍ aut ♓ gr. 20. 30′.

Secundùm hæc igitur, quoniam in gr. 20, 30′ ♓ incidit locus eccentricus die 12. Jan. 1672″, existimo anno 1671 & 1672 Saturnum brachiis cariturum; non toto utriusque anni tem-

tempore, ſed hoc pacto, ut menſibus quidem Aprili, Majo, Junioque anni 1671, nondum iis ſpoliatus cernatur, ſed tenuia etiamnum utrinque extent qualia ſub finem anni 1656 obſervavimus. Julio autem aut Auguſto gracilescant prorſus tandemque diſpareant & rotundum Saturnum relinquant. Quo vultu non tantum ad Heliacum occaſum uſque conſpiciendus erit, hoc eſt uſque ad finem Februarii anni 1672; ſed eundem quoque exoriens rurſus menſe Aprili referet, nec amittet niſi Julio menſe aut Auguſto. Circa hoc enim tempus adcreſcere denuo brachia cernentur, ac paulatim evidentiora fieri; tandemque etiam ſingula prope medium Saturni orbem bifida evadent, quemadmodum ab anno 1656 deinceps augeri ea vidimus.

Quibus temporibus rotunda phaſis reverſura ſit prædicitur.

Manebunt autem ad annum uſque 1685, quando rurſus evaneſcentia ſpectare continget, nempe circa Martii initium. Inde rotundus planeta obſervabitur per annum integrum, excepto eo tempore quo propter Solem deliteſcit. Adeo ut menſe Martio ſequentis anni 1686 brachia demum recuperaturus ſit, ſed tenui tantum incremento quandiu illa vice viſendus erit. Locum Saturni ex Sole reperio in gr. $20\frac{1}{2}$ ♍ die ſecunda Sept. anni 1685, unde prædictas viciſſitudines conſequi neceſſe erat.

Rurſus verò anno 1701, 15 Jun. redit Saturni locus ex Sole ad ♓ gr. 20, 30′. Unde circa finem anni 1700, principiumque 1701, priuſquam Heliace occidat, rotundus lucebit, ac porro quoque ubi jam ex Solis radiis emerſerit, ea facie permanebit ad initium uſque anni 1702: à quo tempore ad occaſum uſque Heliacum tenuia fortaſſe brachia cerni poterunt. Abſque dubio autem, menſe Majo ejuſdem anni, cum denuo obſervari cœperit, reſtituta invenientur.

Atque ita porro ſingulis quatuordecim aut quindecim annis, nimirum bis ad ſingulas Saturni in ſua orbita revolutiones, rotunda forma conſpicienda dabitur; neque enim unquam æquinoctii ſui locos tranſire quin brachia amittat poteſt. Ac facile quidem accurata mutationum ejuſmodi tempora veſtigiis noſtris inſiſtendo, quilibet inpoſterum præfi-

niet, certiusque etiam ubi renascentes Saturni ansas conspexerit.

Cæterum ad eos observandos, quos hic adnotavimus, alatæ formæ ad rotundam transitus, Astronomos omnes intentos esse cupimus. In quorum prædictione si à veritate aut nihil aut pauxillum tantum aberrasse nos invenient, tum procul dubio causas quoque horum phænomenôn germanas qualesque revera sunt sibi explicitas credant. Sin longè hallucinati fuerimus, adeo ut brachiis præditus planeta cernatur, quo tempore ex sententia nostra vel maximè iis carere deberet; indicio id erit, quædam circa rotundam phasin accidere nobis nondum satis perspecta, nec ulli mortalium forsitan pervidenda. Nec tamen annuli propterea hypothesin rejiciendam existiment, quandiu reliquis quæ circa ansas animadvertentur ad amussim, uti hactenus, consentiet.

Porro in hisce ansatis Saturni phasibus, cum nulla adeo subita mutatio locum habeat, ideo nec tempora singularum tam accuratè ut in rotunda distinguere necesse fuit; sed in universum scire sufficit, phasin ansatarum latissimam medio tempore inter duas rotundas incidere; ut proinde circa annum 1663 & 1664 illa reversura sit; iterumque anno 1678 & 1679; ac postea anno 1693. Reliquis enim inter istos intercedentibus annis, tanto angustior annuli ellipsis cernetur, quanto magis rotundæ phaseos tempus imminebit. Et hactenus quidem eorum quæ circa Saturnum observantur causas ac tempora digessimus.

Quando latissima omnium ansæ apparituræ sint.

Nunc fortasse haud alienum proposito videatur, si quemadmodum ex nostra hac statione hucusque systema ejus contemplati sumus, ita ad ipsius Saturni globum deinceps cogitationem transferamus, atque illud dispiciamus, qualis inde universi facies, quænam futura sint intervalla annorum mensium ac dierum, quæve æstatis hyemisque vicissitudo, ac præsertim qualia ob annulum planetæ circundatum contingere eum inhabitantibus necesse sit: ut nonnunquam longo tempore aliquos conspectu Solis privet, aliàs rursum nocturnas tenebras imminuat, arcus lucidi specie horizonti il-

lo-

lorum superstans. Verum eo labore supersedere rectius arbitror, tum quod Astronomiæ gnaris singula hæc expendere, sibique ob oculos ponere, non sit difficile futurum; tum quod in his ipsis multi sint, (ut alios mittam) quibus otiosa & inanis ejusmodi disquisitio videretur; ac tanto quidem magis, quanto absurdius putant ut animantia aliqua ratione prædita Saturnum ac reliquos Planetarum incolere credamus.

De magnitudine autem Saturni ejusque à terris distantia operæ pretium videtur ut sententiam nostram his subjiciamus, siquidem & alio modo illas inquisivimus quam quod fieri solet, & aliquanto aliter de utraque statuimus. Nempe sphærulam illam annulo cinctam quam sub exiguis modo lineamentis spectavimus, diametrum quindecies circiter majorem habere, quam nostra hæc in qua degimus terra, putandum est; abesse autem à nobis, cum proxima est, terræ diametris 100344; cum longissimè distat, 122000. Quæ quidem sequenti ratiocinio nituntur. *De Saturni magnitudine & à terris distantia.*

Docuit nos novo suo ac divinitus invento systemate Copernicus, quamnam inter se proportionem servent singulorum à Sole Planetarum distantiæ, apparentes vero eorundem diametri quanto aliæ aliis majores sint telescopii ope innotescit. Collatis ergo invicem rationibus utrisque, tum distantiæ tum magnitudinis apparentis, vera inde planetarum ad se mutuo, nec non ad Solem magnitudo cognoscitur. Et ad Saturnum quod attinet, primùm annuli ejus diameter quum in minima à nobis distantia comprehendatur angulo sexaginta & octo scrupulorum secundorum; talem enim ad summum reperimus; cumque minima hæc Saturni distantia ad mediocrem Solis distantiam sit fere octupla; sequitur, si tam propinquus nobis fieret Saturnus quam Sol in distantia mediocri, apparituram tunc annuli diametrum octuplam ejus quæ nunc apparet, hoc est 9′, 4″. Solis autem diameter in media distantia est 30′, 30″. Ergo revera ea erit proportio diametri annuli Saturnii ad diametrum Solis quæ 9′, 4″, ad 30′, 30″, hoc est, fere quæ 11 ad 37. Diameter verò Sa- *Quanta appareat major Saturni diameter.*

 tur-

turni ipsius, quam superius diximus ad annuli diametrum se habere ut 4 ad 9, hoc est fere ut 5 ad 11, ad diametrum Solis erit paulo minor quam 5 ad 37.

Quanta vero sit Saturni diameter ad Telluris diametrum collata haud æque certo definiri potest. Astronomi ita hoc investigant, ut primò intervallum inter terram ac Solem ad certum terrestrium diametrorum numerum revocent, inde quæsitam magnitudinum rationem eliciant. At in illo Solis terræque taxando intervallo nimium quantum inter se dissentiunt; nec mirum, quum nulla adhuc tolerabilis methodus ad dimetiendum hoc spatium reperta sit. Nam sive per Eclipses sive per Lunæ dichotomias id deprehendere conentur, facile ostendi queat inanem operam sumi. Quare mihi quidem unica illa, quam dicam, ratio reliqua esse videtur, qua saltem verisimiliter de Planetarum omnium ad terram magnitudine ac distantia statui possit. Telescopio diametri Planetarum apparentes explorentur; ex his singulorum deinceps ad Solem comparata magnitudo investigetur, ut de Saturno modo exemplum dedimus; omnibusque perpensis, ea Telluris ad cæteros assumatur magnitudo, quæ totius systematis ordini aptæque dispositioni quàm maxime congruere videbitur. Ita cum proportio diametrorum Telluris ac reliquorum Planetarum ad Solis diametrum constituta fuerit, constetque insuper quot suis diametris Sol à nobis distet, ex angulo videlicet quem subtendit diameter ejus apparens, jam terræ quoque ad Solem magnitudo nota erit; atque unà Solis distantia, tum à terra tum à cæteris Planetis, Terræ diametris æstimabitur. Hanc itaque nunc viam ingredi placet, ideoque sicut Saturnum cum Sole modo comparavimus, ita de reliquis quoque simile examen instituemus.

Jovis terris proximi diameter apparens quanta observetur.

Jovis diameter, cum proximè nobis adest, sexaginta quatuor secunda scrupula comprehendere mihi videtur; quumque hæc ejus distantia ad mediam Solis distantiam sit ut 26 ad 5, hinc si fiat ut 5 ad 26 ita 64″ ad aliud, invenientur 5′, 35″, amplitudo anguli quem obtineret Jovis diameter si tam propinquus nobis fieri intelligatur atque Sol in distantia

me-

mediocri. Sol autem hîc apparet diametro 30′, 30″. Ergo Jovialis diametri ad Solarem hæc proportio erit quæ 5′, 35″ ad 30′, 30″, hoc est paulo major quam 1 ad 5½.

Accuratè etiam diametrum Veneris dimensus sum, ea quam postmodum exponam methodo, invenique cum terris proxima est, non majorem fore quam octoginta quinque secundorum scrupulorum. Est autem distantia hæc Veneris perigææ ad mediam Solis à Tellure distantiam circiter ut 21 ad 82. Ergo si apud Solem Venus consisteret appareret ejus diameter duntaxat 21″, 46‴. Unde constat ita esse diametrum Veneris ad Solis diametrum ut 21″, 46‴ ad 30′, 30″, hoc est ut 1 ad 84. *Veneris diameter apparens.*

At Martis diametrum terris proximi non excedere 30″ deprehendi, etsi observatione non tam exacta quam qua in Saturno, Jove & Venere usus sum, quippe cujus rationem novissimo Martis ad Tellurem accessu nondum inveneram: Unde quum distantia Martis minima sit ad mediocrem Solis ut 15 ad 41; colligitur ratio diametri Martis ad diametrum Solis ea circiter quæ 1 ad 166. Mars itaque duplo minor Venere secundum diametrum hac ratione efficitur. Atque adeo manifestum est in Planetis non ubique eum servari ordinem, ut qui remotiores à Sole sunt iidem quoque majori sint mole: nam & Jovis sphæra Saturno sine annulo major inventa est. Quo fit ut minus liquido de Terræ ad cæteros Planetas proportione æstimatio iniri possit. Nam si pro ratione ordinis magnitudines essent attributæ, ut Saturnus Jove major esset, Jupiter Marte, hic Venere, hæc Mercurio; inde quidem penè certo colligere liceret, Telluris magnitudinem esse inter Martem Veneremque mediam. Cum verò in aliquibus contrarium deprehendatur, non æquè quid sequendum sit apparet. Veruntamen ut quatenus fieri potest totius systematis concinnitas observetur, id nunc quoque maximè consentaneum videtur, ut sicut loco media Terra est inter Martem & Venerem, ita quoque sit magnitudine. Martis diametrum diximus diametri Solis esse $\frac{1}{166}$; Veneris verò diametrum $\frac{1}{84}$. Inter utramque mediam igitur terræ dia- *Martis diameter.*

metrum ponendo fiet ea $\frac{1}{111}$ diametri Solis. Hujus autem 15 diametro Saturni æquales repertæ ſunt; ergo Saturni diameter Telluris diametrum continebit quindecies, diameter vero annuli Saturnii eandem Telluris diametrum circiter trigeſies & quater. Unde eximia horum corporum magnitudo cognoſcitur; quæ ſane omnem ab aliis hactenus traditam facile exuperat.

Hinc verò & intervallum inter Terram ac Solem neceſſario omnium exiſtimatione majus conflabitur. Si enim diameter terræ diametri Solis $\frac{1}{111}$ continet; Solis autem diameter ſuæ à nobis mediæ diſtantiæ $\frac{1}{113}$ æquat, uti ſequitur ex eo quod diameter ejus obſervetur 30′, 30″; erit certè Terræ diameter $\frac{1}{12543}$ diſtantiæ quæ eſt inter ipſam ac Solem. Deinde cum Saturni minima diſtantia ſit ad mediam Solis diſtantiam ferme octupla, hinc Saturni, cum Terræ proximus eſt, diſtantia habebitur diametrorum terreſtrium 100344; cum verò plurimum aberit, circiter 122000.

Fateor equidem lubrica eatenus ratione hæc niti, quatenus nimirum Terræ magnitudinem inter Martem Veneremque mediam adſumſimus, nullo niſi veriſimilitudinis argumento: adeoque vel millenis aliquot Terræ diametris facile à veritate aberrari potuiſſe. Verùm ut jam duplo majora minorave quam reipſa ſunt intervalla iſta definiverimus, aut triplo etiam; non tamen parum videri debet hactenus ſaltem menſuram eorum comprehendiſſe, quum alia nulla ratio ſuppetat qua non vel decuplo major error timendus ſit. Ita enim omnino exiſtimo. Ad reliquum verò calculum quod attinet, quo Planetarum diametros Solis diametro comparavimus, ſciendum eſt nihil in eo conjecturæ tribui, ſed ex iis quæ data ſunt certa ratione illum procedere. Atque adeo poſitis iis Planetarum diametris apparentibus quas à nobis obſervatas diximus, non poſſe non Solis diametrum ad diametrum annuli Saturno circumdati ſeſe habere ut 37 ad 11; ad diametrum vero Saturni ipſius, ut 37 ad 5; ad Jovis diametrum ut 11 ad 2; ad Martis ut 166 ad 1; ad Veneris ut 84 ad 1. De Mercurio non definiam priuſquam ritè eum dimen-

Diametri Solis ad Planetarum diametros ratio.

menſus fuero; quod hactenus non ſucceſſit, cum ob exilitatem ſideris, tum quod horizonti plerumque vicinum inveniatur, ubi vapores è Terra ſurgentes tremula quadam refractione figuram ejus præciſo ambitu terminari non ſinunt. Patet autem & Saturnii globi diametrum ad diametrum Jovis rationem habere quam 55 ad 74: diametrum vero Martis continere amplius quam vicies & bis, ad Veneris diametrum eſſe ut 34 ad 3. Jovis item diametrum diametri Martis amplius quam trigecuplam eſſe; diametri vero Veneris amplius quam quindecuplam; ac denique Martis diam. ad diametrum Veneris circiter ſubduplam. Quæ omnes proportiones ratæ fixæque permanent, quantacunque diſtantia Solem inter ac Tellurem ſtatuatur, ſi modo apparentes diametri quales tradidimus retineantur. Haſce autem quo modo obſervaverimus denique dicendum eſt, atque eo magis quod longè ab aliorum ſententia alicubi recedamus: veluti cum Veneris diametrum triplo minorem aſſerimus quam à Ricciolo definita eſt, qui tamen ſumma cura circa hæc verſatus videtur. Noſtrum igitur artificium eſt hujuſmodi.

Ratio obſervandi Planetarum diametros apparentes accuratiſſima.

Locus quidam eſt intra tubos qui Solis convexis vitris inſtructi ſunt, circiter altero tanto amplius quàm convexum oculare ab oculo diſtans; quo in loco ſi quid intra tubi cavitatem viſui objiciatur, quantumvis ſubtile aut exiguum, id diſtinctè prorſus ambituque exquiſitè terminato conſpicitur, atque ita pro ratione latitudinis ſuæ partem aliquam rei lucidæ, velut Lunæ per teleſcopium ſpectatæ, viſui ſubducit. Exacta loci determinatio, his quibus nullo vitio viſus laborat, in focum convexi ocularis cadit; myopi aliquanto propinquius punctum accipiendum eſt, contraque, qui tantum à longinquo clare vident, paulo remotius; quod experientia protinus docere poteſt. Hic igitur ſi primò annulus ſtatuatur cum foramine paulo anguſtiore quam ſit vitrum ipſum oculo proximum, eo tota tubi apertura, ſive ſpatium circulare quod uno obtutu in cælo detegitur, præciſâ circumferentiâ deſcriptum habetur. Cujus ſpatii diameter, quot ſcrupula comprehendat, aliquo pacto inquirendum eſt, atque optimè qui-

quidem ex transitu sideris alicujus, cujus tempus numeretur vibrationibus perpendiculi, vel ope Horologii nostri oscillatorii nuper inventi, telescopio interim immoto manente. Scimus enim 4 scrupulis horariis unum cæli gradum & exiguum quid amplius transire: ideoque si verbi gratia numerentur scrupula secunda 69 interea dum stella quædam fixa totam telescopii capacitatem emetitur, argumento id erit $17\frac{1}{4}$ scrupula prima, telescopii hujusmodi apertura comprehendi, sicut nostro evenit. Quo invento virgulam unam atque alteram ex ære aliave materia parare oportet, decrescente paulatim latitudine, tubumque perforare utrinque circa locum illum paulo ante memoratum, quo possint in ipso ejus puncto virgulæ transversæ ante oculum obtendi. Cum igitur Planetæ alicujus diametrum metiri cupimus, adhibitâ eo quo diximus loco virgulâ, notandum est quænam hujus latitudo totum Planetam contegere possit. Eâ enim latitudine acuto deinde circino acceptâ, atque ad totius foraminis amplitudinem collatâ, Planetæ diameter apparens facili ratiocinio innotescet. *Diameter Veneris observata.* Sic die 29 Dec. 1658 diametro Veneris invenimus convenire virgulam cujus latitudo æquabat $\frac{1}{20}$ totius foraminis: est autem hoc, uti diximus, 17′, 15″. Ergo Veneris diameter erat 51″, 45‴. Distantia autem Planetæ ad minimam suam à Terris distantiam se habebat circiter ut 27 ad 16, ergo diameter ejus terris proximæ efficitur 87″, 20‴. Rursus anno 1659, 8 Mart. hora 6 mat. Veneris diametrum observavimus quæ æquabat $\frac{4}{67}$ aperturæ telescopii. Ideoque erat 61″, 30‴. Distantia autem eo tempore ad minimam Veneris à terris distantiam se habebat ut 430 ad 316, ergo diameter ejus maxima fit 83″, 40‴. Sed & alias eadem methodo semper tantum paulo majorem minoremve invenimus, nam sæpius examen hoc repetivimus, atque ex omnibus medium quid sumentes, 85″ pro maxima Veneris diametro supra statuimus. Hanc autem Ricciolus 4′, 8″, taxavit, atque adeo triplo quam nos majorem existimat, sed procul dubio nuda illa oculi æstimatione, qua hîc usus est, in tantum deceptus fuit. Nam Saturni Jovisque diametros, quas methodo cer-

tio-

tiori, appulsu nimirum ad fixas investigavit, eadem fere qua & nos amplitudine definiit, paullum tantum excedens: Saturni enim maximam 72″ continere asserit, Jovis item maximam 68″, quæ mihi sunt 68″ & 64″. Certum autem est non magis in Venere, quam in Jove aut Saturno dimetiendis, errori obnoxiam esse rationem nostram. Et Veneris quidem diametrum Hevelius quoque, ad Lunæ maculas instituta comparatione, tantum 82″ se invenisse testatur cum circa perigæum versaretur, unde diameter ejus maxima non multum sanè nostram superabit. Porro illud in methodo à nobis tradita commodissimum accidit, quod nec Lunæ, nec sideris cujusquam conjunctionem, cum eo quem metiri volumus planeta, opperiri necesse est, sed omni tempore ejus usus conceditur. Nec ad planetarum tantum diametros pertinet, sed ad lunares quoque maculas accuratè describendas, comitumque Jovialium distantias accipiendas rectissimè adhibebitur. Ad planetarum autem diametros longis atque optimæ notæ telescopiis opus esse sciendum est. Nec negligendum in Venere ac Mercurio, ut fuligine leviter inficiatur lens oculo proxima, quo perfectius planetæ ambitus circùm terminetur.

F I N I S.

EUSTACHII DE DIVINIS SEPTEMPEDANI

BREVIS ANNOTATIO

IN

SYSTEMA SATURNIUM

CHRISTIANI HUGENII.

AD

SERENISSIMUM PRINCIPEM

LEOPOLDUM

Magni Ducis HETRVRIÆ Fratrem.

EUSTACHII DE DIVINIS SEPTEMPEDANI

BREVIS ANNOTATIO

IN

SYSTEMA SATURNIUM

CRISTIANI HUGENII.

SERENISSIME PRINCEPS.

NOn ita pridem Christiani Hugenii liber de Saturnio systemate Celsitudini tuæ Serenissimæ inscriptus in meas manus incidit, in quo, & de me unum quidpiam, & de reipsa nonnulla esse comperi, quæ cum veritate minùs consentiant. Nollem literatos homines, quibus telescopii majoris copia non est, in errorem induci; cum jam alioquin satis proclives sint ad excipiendam credulis auribus, vel oculis eam rerum cœlestium novitatem, quæ hactenus incompertæ orbi fuerunt: Accedit, quod libelli auctor eam diligentiam à se adhibitam esse attestatur, qua certè quispiam majorem in illo non desideret; quod revera non parvi ponderis est, ad captandam hominum credulitatem, erroremque in eorum animos insinuandum. Itaque meum esse duxi, tum ea, quæ mihi afficta sunt, tum ea, quæ cœteris omnibus errandi occasionem facilè præbere possent, brevi hoc & publico scripto refellere; brevi quidem, ne plus æquo legentibus molestum sit; publico verò, ne privati Hugenii errores publici fiant; aut si jam publici facti sunt, ne quid

inde respublica literaria detrimenti capiat, ut publicè à me configantur. Quia vero Hugenius tuis auspiciis libellum suum vulgavit, iisdem ego potiori jure brevem hanc discussionem in publicam lucem prodire volui, qui tot nominibus Celsitudini tuæ Serenissimæ, totique plusquam regiæ Mediceorum familiæ obstrictus sum.

Tria igitur in hac scriptione præstabo; primò enim affictam mihi fraudem amoliar; aliquot deinde Auctoris errores indicabo, ea tamen styli moderatione, quæ & Christianum, & ingenuum, ne dicam, EUGENIUM, hominem deceat: cum demum Auctor scripserit pag. 1. phænomeni Saturni rationem & causam nec Galilæo, nec Astronomorum cuiquam compertam fuisse, eamque dumtaxat explicari posse, inserta Saturnio globo splendentis annuli corona, ne Jovi, quem astra Medicea jure coronant, detrahi corona & jam olim exauctorato Saturno restitui videatur, Fabriani systematis rudimentum quoddam breviter exponam, in quo, adducta Saturni phænomena ea facilitate explicantur, qua, nescio, an major excogitari possit; in ea scilicet terræ quiescentis hypothesi; quam catholici Astronomi amplecti dumtaxat & contra Heterodoxos Aristarchos tueri debent. Cæterùm illa omnia, quæ à me scribentur, æquissimæ tuæ censuræ, ac recto judicio subjecta esse velim; nec abs re, opinor, cùm te literati omnes, ut Mecænatem; & politiorum operum artifices, ut singularem patronum colant; sed ad rem venio.

Primo igitur loco Hugenius, antequam systema Saturnium aggrediatur, præmittit sui telescopii descriptionem; cum enim, ut ipse ait, alia perspicilla non essent, nisi quinque aut sex pedes longa, seriò & maximo studio ad longiora fabricanda animum & manum applicuit: sed advertere potuit ac debuit, in illa observatione mea Saturni, quam ipse refert, mentionem à me factam fuisse telescopiorum variæ longitudinis, quæ ad prædictas observationes adhibueram, scilicet 15. 24. & 36. palmorum; multa autem hujusmodi fabricavi; Illustrissimus Eques Dighby, vir ut nobili genere, ita ingenio perspicacissimo & omni doctrinæ genere conspicuus sex, cum

Ro-

Roma discessit, secum detulit, unum Thomas Paggi nobilis Anglus; Taurinum alterum missum est; Fabritius Guastaferrus Romanus, vir consuetudine & amicitia mihi conjunctissimus, rerumquè optimarum studiosissimus, unum habuit; Bononiam unum misi ad Illustrissimum Comitem Carolum Antonium Manzinum, virum sanè rerum istarum peritissimum, doctorem eximium, cujus Dioptricam in dies expectamus, in qua haud dubiè ea legemus, quæ multi hactenus desiderarunt: Unum etiam fabricavi Illustrissimo D. Caramuel Campaniæ Episcopo; omitto alia; nihil enim aliud jam à multis annis ago.

Tum describit telescopium à se fabricatum, longum pedes Rhenolandicos 23. qui si reducantur ad palmos Romanos, quos adhibent architecti, faciunt palmos 31. uncias 4. Vitri objectivi (sic vulgò vocant) orbis apertus diametrum habet pollicum 2. cum triente: seu palmi Romani unc. 3. scrupul. 1. Vitrum oculare ex duobus invicem unitis constans, lenti æquivalet, & radios, parallelos colligit, ac projicit in focum, distantem pollic. 3. prædicti pedis, id est, uncias 4. scrup. 2. palmi Romani: inde porrò deducit Hugenius, vitrum suum objectivum exquisitum esse, cum sit patiens lentis adeo acutæ, ut vocant, & ad veras Saturni observationes, ejusmodi tubos, & vitra adhiberi vult.

Hæc facilè omittere Hugenius potuisset; nec enim his regulis opus erat, cum longè ante fabricata fuerint telescopia, quæ tum longitudine, tum vitrorum figura, tum operis perfectione Hugenianis minimè cedunt; adhibui aliquando tubum 36. palmos longum, ac proinde longiorem Hugeniano palmis 4. unc. 8. orbis autem aperti diameter fuit unc. 4. scrup. 2. sed sublatis 2. illis scrup. propter longitudinis differentiam 4. scilicet palm. unc. 8. restat diameter orbis mei vitri, major diametro orbis vitri Hugeniani unc. 1. ac proinde vel hoc nomine, meum telescopium Hugeniano præferendum, ex vulgari & ab omnibus accepta regula; cum scilicet majoris aperturæ, ut sic loquar, vitrum objectivum patiens sit.

Præ-

Præterea frustra omnino duo vitra in vitrum oculare utrinque convexum conjunxit; cùm unica lens sufficiat: Ego lentem in prædictis observationibus adhibui, radios parallelos colligentem, & projicientem in focum distantem unc. 3. scrup. 2. sed hæc distantia minor est distantia projectionis Hugenianæ unc. 1. igitur lens mea acutior: licet tubi mei longitudo major sit; & cum ex hoc telescopia censeantur, ut optimè ipse observat; inde certè pari jure deduco, meum telescopium præstantius esse, idque triplici nomine. Primò, quia longius est. Secundò, quia vitrum objectivum habet majoris aperturæ patiens. Tertiò quia lentem acutiorem sustinet.

Hugenius pagina libelli 37. de me ita scribit. *Tales autem* (Saturni scilicet ansas) *Eustachius de Divinis notavit annis* 1646. 1647. 1648. *à quo editum Schema ad numerum* TAB. LII. fig. 10. 10. *hic exhibuimus; isque cum præstantissimus perspicillorum artifex habeatur, credibile est, omnium emendatissimè Saturni faciem descripsisse, nisi quod umbras illas, quæ in schemate apparent, de suo, ut opinor, adjecit.* Est sanè, quod multas illi gratias habeam, pro iis laudibus, quas mihi ignoto homini ac minimè cogitanti aspersit; sed quid hoc est, *de meo adjecisse*, nisi hominibus imposuisse? Si enim de meo est, fictum est, nec reipsa talem Saturnum exhibui, qualem observavi; quia de meo umbras illas adjeci, quas in Saturno non vidi, nec videre potui, cùm revera in Saturno non sint; fabula igitur est, fictio est; immo in re tanta pro luculenta fraude haberi debet, cum inde homines in errorem facilè inducantur. At si umbras de meo adjeci, Hugenius ejusdem criminis reus est, qui passim, ut suum annulum Saturno injectum meliùs exprimeret, longe majores umbras adjecit: sed profectò neuter adjecit de suo; ut enim globus, corpus scilicet solidum, in plano describatur, aliquid umbræ accersendum est, quo figura solida exprimatur & appareat, alioquin merus circulus evadet: Quis vel tyro in arte graphica hoc nescit? Umbras scilicet accersendas esse ad figuras solidas designandas. Umbram igitur de meo

meo non adjeci, ſed globum in plano deſcripſi, qui tamen ſine umbræ beneficio deſcribi non potuit; Umbra enim facit, ut reliquum figuræ quaſi extare, ac prominere videatur; in quo uno ſtereometria ab ichnographia diſcrepat: aut fortè dicere voluit, cavitatem anſulæ Saturniæ nigriore, quàm par ſit, umbra, à me fuiſſe fœdatam: cum tamen ejuſdem cum reliquo cælo coloris eſſe videatur; ſed pace illius dixerim; quotquot anſarum cavitates vidimus, nigriores reliquo cælo, & magis atras aſpeximus, neque hoc teleſcopii vitio quiſquam tribuat; nempe ſi revera anſæ illæ vacuæ ſunt, & ad ipſum cælum radii viſorii per illas trajecti terminantur, ejuſdem cum cælo coloris erunt, quocumque tandem teleſcopio aſpiciantur. Itaque, quod mihi Hugenius pro ſua humanitate, præſtantiſſimi artificis elogium attribuit, ut me præſtantiſſimum eſſe non admitto, ita pro iis laudibus, quæ in me non quadrant, gratias, ut jam dixi, habeo; quia tamen unde altiùs extollit, inde profundiùs deprimit, dum fabricacati à me teleſcopii fidelem uſum deſiderat, utpote quod Saturnios ſatellites ea forma, eoque vultu non exhibeat, quo revera exhibendi eſſent, ad alterum caput venio, in quo luculenter oſtendam, Hugenium in nonnullis hallucinatum eſſe, quod an perſpicillis ab eo fabrefactis tribuendum ſit, an verò auctoris fictioni, alius fortè dubitaret; ego ſanè doctiſſimi hominis candori nihil detractum velim, quare haud dubiè teleſcopii vitio, quidquid erroris admiſit, tribuendum eſſe judico: leges porro, quas vitris ſuis pag. 3. & 4. præſcripſit, ſufficiat ſupra indicaſſe.

Conſtat verò auctorem duobus teleſcopiis uſum fuiſſe, in traditis obſervationibus; primum fuit 12. pedum, vel palmorum 16. more Romano paulò plus, duobus convexis inſtructum; alterum 23. pedum, de quo ſupra; In hoc, ejus dictis ſtandum eſſe puto: Ego tamen, ut dixi, longius teleſcopium adhibui, ſcilicet triginta ſex palmorum; quare non dubitarim, quin Saturnum mihi æquè perſpicuè exhibeat; præſertim cum vitra ſatis accuratè, & diligenter elaborari, tornari, formari, lævigari à me ſoleant: ſi Hugeniani teleſco-

ſcopii mihi copia fieret, facilis comparatio inſtitui poſſet, quam certè ab ipſo Hugenio inſtitui poſſe, nihil vetat; cum enim per totam Europam perſpicilla à me fabrefacta, diſtracta jam & quaſi diſſeminata fuerint, in ejus manus facilè venire potuerunt: rem narro, quæ mihi ante aliquot dies, accidit; Jam unus, vel alter annus elapſus eſt, ex quo R. P. Antonius Maria de Reitha Bononiam veniens, teleſcopium, quod ſecum habebat, 24. palmorum, mirificè prædicabat, aſſerebatque, nullum ejuſdem longitudinis in Italia eſſe, quod ſuo non cederet; hujus rei certior factus ab Illuſtriſſimo Comite Car. Ant. Manzino viro, ut dicam iterum, rerum iſtarum peritiſſimo, & curioſiſſimo, ad eum miſi, ut ipſe petierat, teleſcopium ejuſdem longitudinis, utrumque æqualium virium, & ejuſdem bonitatis repertum eſt; hæc jam penè mihi exciderant, cùm ecce Illuſtriſſimus Dominus de Monconis, nobilis Lugdunenſis, vir, tum ingenio, tum genere pleriſque notus, incogitanti mihi, poſtridie cinerum adfuit; poſt ſolita urbanitatis officia, cùm inter colloquendum, de perſpicillis mentio facta eſſet, non habeo ampliùs, inquit, tuum illud teleſcopum 24. palmorum, illudque ſanè optimum, quod ante aliquot annos Lugdunum ad me ignotum licèt hominem miſeras; illud enim bonus P. Reitha ſuis precibus à me extorſit; mecum igitur, inquam, pugnavi, ejuſdemque parentis liberos quaſi hoſtes inter ſe commiſi; in riſum prorupimus ambo; non tamen eſt, quod aliquis hoc vitio vertat Patri Reithæ, qui pro ſuo candore ultro fatebatur, præfatum teleſcopium non à ſe, ſed ab alio elaboratum fuiſſe: Scripſi hæc, ut vel inde conſtet, fieri potuiſſe, ut aliquod ex meis teleſcopiis in manus Hugenii veniret, ad comparationem inſtituendam; dum id fiat, facilè mihi perſuadebo, nihil eſſe, cur mea Hugenianis primas deferant; ac proinde ſuppoſita eadem longitudine, æquè clare, & fideliter Saturnios ſatellites exhiberi à meis, ac ab Hugenianis.

His præmiſſis; conſtanter aſſerit Hugenius, pag. 547. & 556. Saturni ſatellites nunquam ab eo ſejunctos figura ſphærica videri, quales prima figura ab eo excuſa, & à me recu-

ſa exhibet; quod tamen falſum eſſe, omni aſſeveratione affirmo, cùm anno 1657. cœptis obſervationibus die 30 Junii, & ſepties, vel octies, ad vigeſimum uſque Julii repetitis, adhibito ad hunc finem teleſcopio triginta ſex palmorum, accuratiſſimè fabrefacto, prædictos ſatellites figura ſphærica tornatos à Saturni globo omnino ſejunctos obſervarim, quales prima figura Hugenii illos repræſentat, & quales jam antè Galilæus viderat, idem obſervavi anno proximè ſequenti, teleſcopio 24. palmorum uſus; adfuerunt teſtes omni exceptione majores; præ cæteris, vir clariſſimus Alphonſus Borrelli, Magni Etruriæ Ducis inſignis Mathematicus, & Geometra, typorum gloria orbi ſatis notus: neque hæc contradicendi ſtudio à me adſtrui, quiſquam ſibi perſuadeat; quo enim tempore, hos ſatellites ſphæricos à Saturni globo, modico quidem, ſed quod ſenſu, adhibita teleſcopii opera, percipi poterat, intervallo disjunctos vidi, nunquam mihi perſuadere potuiſſem, aliquem fore, qui ſejunctos unquam videri poſſe negaret; Dico igitur, disjunctos à me viſos fuiſſe; negat Hugenius disjunctos videri poſſe; produco teſtes omni exceptione majores, qui una mecum viderunt; Utri quæſo habenda fides? Sejunctos videri poſſe contendo, cùm reipſa ſejunctos viderim, adductis teſtibus omni exceptione majoribus; negat Hugenius, videri poſſe; quia ſcilicet nunquam ipſe vidit; ſed alii viderunt; negat tamen videri poſſe; adſunt & jurant teſtes; illos ejurat, & fidem alienis teleſcopiis detrahit; perperam quidem, meo judicio; nempe breviore teleſcopio diſcerni non poterant, licèt revera disjuncti eſſent: igitur cùm eos ſejunctos viderim meo teleſcopio, ideo neceſſaria conſecutionis vi deduco, hoc perfectius, & melius eſſe; nec enim longitudo æqualis, immo, nec major defuit; nec accurata operantis manus vel artificis diligentia deſiderata eſt. Teleſcopium igitur Hugenii, longiùs licet, breviorum vitio laboravit, cum illius opera, ſejunctos diſtinctè videre non potuerit, quo vitio, ut dixi, breviora perſpicilla laborant; falſum enim eſt, quod habet pag. 35. breviore teleſcopio 8. circiter palmorum ſejunctos, longiore

TAB. LII. fig. 1.

verò 16. palmorum conjunctos videri, nempe, ut dixi, potiore jure, sejuncti, majore telescopio, conjuncti verò, minore viderentur; cùm verò suo minore sejunctos viderit, majore verò ad instar brachiorum, hinc inde adnatorum extantes, perspicuum majoris telescopii vitium est, cujus operâ radii minùs accuratè projiciuntur, & ut vulgò dicimus, inepta sit terminatio. Telescopium igitur Hugenianum meo primas deferat, oportet; quo scilicet ea distinctè vidi, quæ ille suo distinctè videre non potuit.

At non me latet causa qua fiat, ut Hugenius obstinatè neget, sejunctos videri posse; commentus est ipse hypothesim annuli Saturni globum cingentis, cujus operâ, illas phases explicare conatur, quæ in hoc planeta observatæ fuere: ut autem suæ opinioni, vel suo commento consulat, illud profectò ipsi negandum fuit, quo semel admisso commentitia illa hypothesis penitùs corruebat; si enim annulus Saturnum ambit, nunquam sejuncti satellites videri queunt: pari modo fingit, præfatas ansarum vacuitates ejusdem cum reliquo cælo coloris esse, ut suæ hypothesi consulat; supposito enim illo annulo in iis vacuitatibus, nihil nisi cælum videtur; at revera, ut jam suprà dixi, nigriores illæ apparent, ex quo Hugeniana hypothesis corruit. Ut igitur suam illam opinionem indemnem servaret, ea removenda esse putavit, quæ si adessent, illius opinionis falsitas manifesta evaderet: & hæc sibi persuasit, nobis tamen minimè persuasurus, qui rem secus esse, oculari demonstratione prorsus evicimus.

Alterum est quod Hugenius vel finxit, vel leviter sibi persuasit, quod tamen ejusdem furfuris est; dicit enim, fasciam quandam nigricantem in Saturni globo videri, quæ quidem ex æquo medium discum secat, quando solus Saturni globus suo satellitio destitutus apparet; ubi verò satellites adsunt, modò suprà, modò infra brachiorum lineam fascia videtur; sed hoc etiam merum figmentum est ab auctore excogitatum, ut annulo suo consuleret; nam cùm ipsi opponeretur, admisso semel hoc annulo nunquam Saturnum videri posse, vel ansulis, vel brachiis destitutum, quod tamen omnibus obser-

ſervationibus repugnat; nempe ubi planum annuli directè in oculos incidit, annulus appareret ad inſtar zonæ rectæ, æqualis diametro annuli, ac proinde majoris diametro Saturni; igitur ad inſtar brachiorum duæ appendices hinc inde Saturnio globo adhærerent: cum igitur hac difficultate, & hoc nodo inſolubili annularis illa hypotheſis laboraret; finxit illius auctor, extimam annuli ſuperficiem ineptam eſſe ad luminis repercuſſionem, ac proinde faſciam illam nigricantem inde ortum ducere, & ob penuriam luminis repercuſſi, extantes illas appendices ſub aſpectum noſtrum non cadere: Hæc habet pag. 542. 545. 576. Aliam cauſam ſubnectit pag. 585. ab obliquitate radiorum illapſorum petitam, qua fiat ut pars annuli ad nos obverſa obliquè dumtaxat illuminata non videatur; immo hoc alterum addit, ſuperficiem annuli ad nos obverſam minimè à Sole illuminari; ac proinde mirum non eſſe, quod minimè videri poſſit; omiſeram, quæ habet pag. 551. de Saturnicolis.

Cuncta hæc facilè difflantur; nunquam enim faſciam illam nigricantem, quamvis exquiſito teleſcopio uſus videre potui; nemo unquam præter illum obſervavit; nec tamen teleſcopia noſtra Hugenianis deteriora eſſe crediderim; fictitia igitur cenſenda eſt illa faſcia, aut certè vitrorum vitio tribuenda: quod autem dicit, extimam illam annuli ſuperficiem ad lumen reflectendum ineptam eſſe, vel ex eo falſum eſſe conſtat, quòd in Saturni diſco partes omnes æquali lumine perfuſæ videantur: Nulla igitur pars ad nos obverſa ad luminis reflexionem inepta eſt. Præterea demus ita eſſe, & faſciam illam paulò obſcuriorem in Saturni diſco videri; nihil tamen obſtaret, quin brachia eodem lumine perſpicua eſſent; id eſt extrema ſegmenta apparentis zonæ, in quam annulus hoc ſitu aſpectus projicitur, extantia, & excurrentia hinc inde extra Saturnium globum, viderentur, eodem licèt nigricante colore diluta. Ad obliquitatem illapſorum radiorum perperam confugit; alioquin in cæteris planetis eadem ratio militaret; nempe fieri non poteſt, quin major pars ſuperficiei convexæ, obliquum radiorum ſolarium illa-

psum excipiat. Id demum, quod subnectit, superficiem annuli ad nos obversam à sole aliquando non illuminari, ex regulis opticis omnino refellitur; supposita scilicet maxima illa Saturni distantia, nec non solis diametro longè majore, quo fiat, ut superficies Saturni ad nos obversa semper illuminetur; hinc totus Saturni discus semper apparet. De Saturnicolis nihil est, quod dicam, risu potiùs, quàm argumentis hoc commentum refellitur; accedit, quòd catholicis dogmatis adversatur, quæ homines tantùm illos agnoscunt, qui ab Adamo duxerunt ortum.

Nonnulla etiam falsa admiscuit, ut pag. 539. ubi dicit fascias Jovis lucidiores esse reliquo disco; cùm tamen obscuriores certò videantur: Item globo Martis latiorem fasciam sub obscuram obduci; nihil tale unquam observatum est; deinde nunquam Saturnum vidimus ea forma, quam illi tribuit pag. 542. 545. tractum illum cæli circa Oriona, illustriorem esse vidimus, cum iis stellis splendentibus, quas ipse recenset. Multa etiam de Saturni phasibus statuit, ex paucorum annorum observationibus, quæ pro certis habere non possum, donec subsequentium annorum observationibus congruant; nempe ipse observationes suas primum cœpit 25. Martii anno 1655. easque ad 19. Februarii anni 1656. breviore tamen telescopio usus, 12. pedes longo perduxit; ac proinde minùs fideles censendas, ut ipse ultrò fatetur. Standum igitur observationibus deinceps ab eo factis, ac repetitis identidem, adhibito longiore tubo, 23. circiter pedum, perductisque ad 26. Martii anno 1659. Si aliquæ essent ab eo notatæ à 30. Junii ad 20. Julii anno 1657. viderem utrùm meis consentirent; sed nullas toto illo tempore factas invenio; an fortè paucæ illæ observationes sufficient ad certum quid statuendum? præsertim cum toto illo, quo factæ sunt, temporis intervallo, vix Saturnus 38. gradus confecerit, traductus scilicet à 20 grad. Virginis ad 28. Libræ; an fortè inquam modicus ille arcus decursus sufficiet ad certam & indubitatam hypothesim statuendam? Statuit autem, ansas magis apertas, & patentes videri, Saturno existente in

in grad. 20, 36. Gemin. & in opposito 20. 36. Sagitt. Sphæricum verò sine ansis, & satellitio in grad. 20. 36. Pisc. Itemque in 20. 36 Virg. quod sanè utrùm futurum sit, sequentes anni docebunt. Ipse hactenus in 20. Virg. observavit, in aliis punctis non vidit, nec est, quod aliorum observationes adducat, quibus fidem omnem detraxit, ac proinde illi suffragari non debent. Unum, quod habet, omittere statueram; sed quandoquidem in mentem venit, saltem indicabo; dicit enim, Saturni globum circumagi quodam vertiginis motu; sed hoc tantummodo divinat, non probat; licèt enim Sol hoc vertiginis motu gaudeat, quod probari solet ex maculis: inde tamen nemo rectè deducat, hunc motum reliquis planetis competere. Hoc ii præsertim insinuare & inculcare non cessant, qui globo terraqueo motum adstruunt; sed frustra, cùm Lunam hoc vertiginis motu non agi, certissimum sit: quod certe non dico, quasi hic vertiginis motus in Saturno alicujus momenti sit, quod ad rem hanc pertineat, ultrò enim fateor fieri posse ut prædicto motu agatur: dico tamen, ex observationibus huc usque factis haberi non posse.

Quia verò nemini suam laudem ereptam velim, admitto & osculor alia multa ab Hugenio tradita, cum veritati apprimè consentiant. 1. planum illud, in quo videntur esse satellites, æquatoris plano parallelum rectè judicat: hoc jam indicarat cum aliis Galilæus; & facilè crediderim, licèt autor nullam hujus rei rationem adducat. 2. Ansas illas hinc inde semper æquales esse contendit; jure quidem: licèt enim fortè aliquando altera longior visa sit, alterius tamen cujuspiam per accidens adjuncti extrinsecus, accessio illa facta est. 3. Vult, Lunam quandam esse Saturniam, (sic enim vocat, licèt propriè loquendo Luna non sit, cùm circa Saturnum suum orbem non agat) supremum scilicet omnium satellitem, ad instar stellulæ sæpe à se observatum, modò ad ortum, modò ad occasum, modò conjunctum Saturno, cujus primus ille inspector fuit, in quo sanè maximam laudem meretur: ego quidem cùm jam anno 1657. de hoc aliquid inaudiss-

diissem à clarissimo viro Michaele Angelo Riccio, eodemque nobilissimo hujus temporis Geometra: Eundem sæpe observavi à 30. Junii ad 20. Julii, scilicet die 30. Junii hora 2. noctis juxta horologium Italicum, id est 2. horis cum dimidia post solis occasum, illum observavi ad ortum Saturni; item 2. Julii, 4. 9. 12. eadem hora, die 14. non apparuit; die 20 ad occasum visus est. Ad prædictas observationes adhibui telescopium 36. palmorum. Cur verò ab aliis Luna illa Saturnia observata non fuerit ante Hugenium, non quidem telescopiorum vitio, sed vel inadvertentiæ, vel nimiæ ejusdem à Saturno distantiæ, vel parvitati, vel conjunctioni tribuendum est. 4. Ansæ Saturni nunquam mihi visæ sunt una vice acutiores, alia obtusiores; majores tamen seu latiores aliquando esse comperi. Quod autem sæpè ac sæpius inculcat, prædicta omnia explicari non posse, nisi annulus ab eo excogitatus Saturni globum circumdet, pace illius dixerim, à veritate alienum est; non desunt alii modi, quibus res ista facili designatione exponatur: præ cæteris, mihi satis arridet illa systematis Saturnii ratio, quam P. Honoratus Fabri Societatis Jesu vir mihi maxima familiaritate conjunctus excogitavit, cujus breve schema subjicio.

Supponit. I. terram immobilem in centro mundi, circa quam cælestes globi suos gyros agunt; hanc enim sententiam mordicus defendit, ut catholicis decretis, sacris literis, observatis phænomenis, ac rectæ rationi probè consentientem. II. Motum realem Saturni æqualem esse, apparentem verò inæqualem; abhorret enim hominis intellectus, ut vel ipse Copernicus prudenter monet, à reali motuum inæqualitate. III. Supponit, motu æquali, æqualibus temporibus, æqualia spatia decurri, reali scilicet, seu recta, seu curva; ac proinde majorem orbem tardiùs, minorem citius, eodem motu describi. IV. Supponit, motum circularem diurnum ab ortu ad occasum. V. motum rectum ab apogæo versus perigæum, & vicissim; acceleratum quidem, ab utroque termino ad mediocrem distantiam, quæ lineam apogæum, & perigæum connectentem bifariam secat; retardatum verò à mediocri distan-

tia

tia ad utrumque terminum; hunc autem primum motum rectum vocat. VI. Supponit alium motum rectum, secundum scilicet, ac declinationis ab Austro ad Boream, & vicissim; fines porrò diversi sunt in diversis planetis, pro diversa declinatione maxima cujuslibet planetæ; est etiam hic motus eodem modo acceleratus, & retardatus, quo prior; & mediocris distantia est in æquatore: ex his tribus motibus, Saturni motus componitur; vel potiùs est motus quidam simplex circulari affinis, prædictis duabus determinationibus instructus; vel, ut ajunt Scholastici, modificatus; primus motus brevior est; secundus diuturnior; cujus sanè discriminis causam affert. Sed ut rude aliquod schema exhibeam, omisso secundo motu recto, sit centrum mundi B. hic terram collocat immobilem. Sit G B distantia Saturni apogæi; B O distantia perigæi; B P distantia mediocris, Saturnus circulum, vel orbem radio G B tardius percurrit, quàm Stella vel punctum primi mobilis, cui respondet; citius verò percurrit orbem radio B O, & æquè citò radio B A minore mediocri distantia B P. His præmissis, sit Saturnus in apogæo G, respondens puncto C primi mobilis, vel initio arietis v. g. & supponatur punctum C per S describere suum circulum, motu diurno; item Saturnus in G suum, per R, scilicet versùs occasum; punctum C citiùs absolvit suum gyrum, quàm Saturnus; igitur Saturnum à tergo relinquit, versùs ortum, scilicet in aliquo puncto curvæ G H; nempe primo motu recto, à circulo apogæi L R sensim descendit ad circulum perigæi Z X, donec tandem multis orbibus actis, perveniat in H, & respondeat puncto E primi mobilis, v. g. 20. gradui Arietis: toto illo tempore, moveri dicitur in consequentia; id est, juxta seriem signorum, initio quidem, motu accelerato; & sub finem, retardato; in H stare videtur: hîc enim æquè citò ac punctum E suum gyrum agit: Quia verò adhuc descendit versùs perigæum, decurrit deinceps suos orbes citiùs, quàm puncta primi mobilis, quibus respondet; ac proinde illa relinquit à tergo, versùs ortum ab H quidem, ad perigæum I: ab I verò, ad K; hinc videtur regredi ab E ad

TAB. II. fig. 1.

D, quæ ſunt puncta primi mobilis; idque motu retardato, circa H & K, id eſt, circa puncta ſtationum, accelerato verò, hinc inde circa I. hinc duplex ſtatio, in punctis ſcilicet E & D. hinc regreſſio, vel motus retrogradus brevior directo; quia radius circuli æquè diuturni (ſic eum vocat, quem planeta æquè citò conficit, ac punctum primi mobilis ſuum) eſt brevior, radio mediocris diſtantiæ B P. ex his ſequitur latitudinis mutatio ſingulis ferè diebus: ſed hæc rudi Minerva deſcripſiſſe ſufficiat; ex quibus omnia Saturni phænomena, nullo ferè negotio, per cauſas phyſicas explicat. Jam ad ſatellites Saturni orationem converto. Quinque Fabrius agnoſcit; minimus & ſupremus omnium eſt quem Hugenius, primus opinor, ſub aſpectum hominum adduxit, quemque, ut dixi, ab illuſtriſſimo, & doctiſſimo Riccio certior factus, adhibito 36. palmorum teleſcopio, an. 1657. per multos dies, menſe Julio conſpexi, ortivum modò, mox occiduum; dicta autem die non comparuit, quia conjunctus Saturno erat. Hic ergo ſupra Saturnum eſt, & dum in perigæo verſatur, citiùs ſuum orbem abſolvit, quàm Saturnus ſuum, quando eſt in apogæo, tardiùs; & æquè citò in mediocri diſtantia, æquè ab utroque termino diſtante: hinc aliquando Saturnus illum à tergo relinquit, aliquando ille Saturnum; hinc aliquando ortivus, aliquando occiduus, aliquando latet in conjunctione; à conjunctione apogæi, ſemper ortivus; à conjunctione perigæi, ſemper occiduus; quid plura? in Mediceis appoſitam analogiam habemus.

TAB. LI. fig. 2. Alii quatuor inferiores ſunt, Saturno licèt ſuperiores, quorum ſyſtema ſic Fabrius explicat: Sit centrum terræ, & mundi A, Saturni diameter G C, centrum B, ducta cenſeatur recta A B P; ſint duo N H, S D, in maxima digreſſione N H ortiva; S D occidua, hinc inde æquali; in qua ſit illorum ſtatio; & mediocris diſtantia A I; hoc loco, diametros dumtaxat pro globis exhibeo: tendat autem N H versùs perigæum; & S D, versùs apogæum, pari greſſu, & paribus intervallis, ita ut hic apogæum, & ille perigæum ſimul attingant; iſtud eſt inter B I, illud verò inter I O. tunc

uter-

uterque ſimul erit in conjunctione, alter perigæi, alter apogæi, ſed paulò poſt N H à perigæo aſcendit ad maximam digreſſionem occiduam S D, & S D ab apogæo deſcendit ad maximam digreſſionem ortivam N H; atque ita deinceps, repetitis ac reciprocis recurſibus: idem prorſus dictum ſit de duobus K L, K E, quorum mediocris diſtantia communis eſt in O; perigæum commune inter O I; apogæum ſupra O, æquè diſtans; maxima digreſſio ortiva K L, occidua R E; eſt autem digreſſio iſtorum, qui ſuperiores ſunt, major digreſſione illorum, quos inferiores eſſe ſupponit; ſuperiores appellat lucidos, inferiores obſcuros; lucidi conſtant ex materia aptiſſima ad repercuſſionem luminis; obſcuri verò, ex ineptiſſima, ad eundem finem; nec difficile fuit auctori naturæ, hujuſmodi materiam invenire, cùm etiam in hoc ſublunari tractu hujuſmodi habeamus: mediocris diſtantia in utriſque ab apogæo, & perigæo æquè diſtat: vult etiam idem Fabrius, quinque ſatellites ejuſdem eſſe cum Saturno declinationis, ac proinde ſemper in eodem plano eſſe æquatori parallelo: quod facilè obtinetur, modò ab initio eandem declinationem habuerint, eundemque ſimul inierint declinationis motum, in eodem ſemper plano æquatori parallelo ſiti: nec eſt, quod quiſquam miretur, quinque ſatellites Saturno adeſſe, cum Jovi quatuor adſint, Soli duo, Terræ unus, Marti fortè tres, quis ſcit, nondum explorati; quia à Martis globo longius digrediuntur, quàm Medicei à Jove; non tamen tam longè, quàm Venus aut Mercurius à Sole; vult demum, obſcuros citiùs ſuam revolutionem abſolvere, & lucidos tardiùs; cujus rei analogiam habemus in Venere, & Mercurio.

His poſitis, omnes Saturni phaſes, omnia phænomena facilè omnino explicantur. Solus Saturni globus ſuis ſatellitibus aliquando deſtitutus apparet, ſcilicet figura ſphærica; nec enim alia cæleſtibus corporibus indita eſt: hujus phænomeni ratio ex eo petitur, quòd duo lucidi (de primo enim omnium ſupremo hoc loco non agitur) vel ſint conjuncti, id

est, alter in apogæo, alter in perigæo, vel ab obscuris penitùs tecti, etiam extra conjunctionem:

II. Duo lucidi aliquando videntur à globo Saturni omnino sejuncti, & figuram sphæricam præferentes; hoc ipsum toties accidit, quoties duo obscuri in conjunctione versantur, alter scilicet in apogæo, alter in perigæo, & lucidi hinc inde digressi.

III. Aliquando lucidi apparent, quasi lucidæ ansulæ essent, vel Lunæ falcatæ; hoc evenit quando obscuri sunt quidem interpositi, non tamen integrum lucidorum discum tegunt.

TAB. LII. IV. Hinc modò plus, modò minùs disci lucidi ab obscuris tegitur; unde diversa phasis, & diversa figura; neque hoc telescopii vitio Hugenius tribuere debuit, cùm alioqui optima ab authoribus, quos citat, adhibita fuerint; Galilæo scilicet, Scheinero, Ricciolo, Hevelio, Gassendo, quorum figuræ ab Hugenio excusæ, in hac hypothesi, nullo negotio demonstrari possunt; undecima tamen inter alias Fontanæ fabulas referenda est; decima tertia, quæ caret auctore, modò tantulùm reformetur, fortè suo modo explicari posset, in aliquo casu; septima Hevelii fictitia est; sphæroidem esse putavit, sed hæc figura cælestibus globis minimè competit; nisi fortè dicamus Saturnum ellipticum videri, quando obscuris in conjunctione statutis, lucidi tantulum à conjunctione recedunt, tunc autem ansulæ non apparent.

V. Verisimile est, obscuros æquales esse lucidis; nihil enim probat, vel majores, vel minores esse, æquales igitur censendi sunt, dum aliquid probet inæqualitatem; immò potiùs æqualitas ex ipsis phasibus persuadetur, quartæ scilicet figuræ, quintæ, sextæ, octavæ &c. Arcus enim falcis lucidæ, cavus scilicet, & convexus æqualium circulorum esse videntur.

VI. Linea, vel diameter ansas lucidas connectens, quæ per medium globi Saturnii centrum duci videtur, est semper

per in plano parallelo plano æquatoris; quia cùm ſatellites Saturni ejuſdem ſemper ſint cum eo declinationis & motu ſemper æquali in aliquo parallelo moveantur, motus enim diurnus ab ortu ad occaſum in aliquo parallelo fieri cenſetur, quid mirum, ſi linea eorum centra connectens in eo plano ſit, quod plano æquatoris parallelum eſt; dixi, *quæ per centrum Saturni duci videtur*, quia revera licèt Saturno ſuperiores ſint, oculus tamen judicat, ejuſdem altitudinis eſſe; ac proinde in eadem linea cum Saturno.

VII. Licèt ſupremi ſatellitis motus ab Hugenio definitus ſit, utpote qui 16. circiter dierum ſpatio abſolvatur, quanquam obſervationes à me factæ tantulùm refragantur; non tamen huc uſque quatuor inferiorum motus, vel ab eo, vel ab alio quopiam definitus eſt, qui tamen ex futuris obſervationibus haberi poſſet.

VIII. Turbinatio Saturni, vel illius annuli fictitii nulla obſervatione probatur, ut jam indicavi; licèt enim ſol hoc vertiginis motu agatur circa ſuum centrum, ut evincitur ex illius maculis; aliis tamen planetis nulla hujuſmodi, vel alia quæpiam probatio ſuffragatur.

IX. Illa brachia oblonga quæ Hugenius Saturno annexa obſervavit annis 1655. & 1656. ſunt omnino fictitia, & vitio teleſcopii tribuenda: cur enim alii non obſervaſſent? præſertim cùm teleſcopium ad hunc finem ab eo adhibitum brevius eſſet, ac proinde non melioris conditionis quàm alia.

X. Figuræ ab illo excuſæ, & rejectæ facilè explicari poſſunt in hac Fabriana hypotheſi: 1ª quidem lucidis in maxima digreſſione, & obſcuris in conjunctione exiſtentibus; 2ª verò, lucidis tangentibus Saturni globum, & obſcuris in conjunctione poſitis; 4ª lucidis in maxima digreſſione poſitis, & obſcuris tantulùm extantibus; ita ut modicam lucidorum portionem tegant; 3ª. eadem eſt cum 4ª. ſed teleſcopii vitio, in mucronem ivit, cùm in con-

vexum ire debuisset; 5ª, & 6ª. lucidis non totis extantibus, & majori ex parte tectis ab obscuris, tunc enim restat quasi falcula, differt autem 5ª à 6ª secundùm plùs, & minùs; 7ª, ut dixi, fictitia est; cùm Saturnus sphærois non sit, nisi fortè eo modo, quem supra num. 4. exposui; 8ª lucidis inter maximam digressionem, & Saturni globum existentibus, tectisque ex parte, à minore portione obscurorum; tunc enim falces majores sunt; latiores quidem, quò propiùs ad maximam digressionem accedunt; angustiores verò, quo Saturnio globo propiores fiunt; 9ª & 10ª ab octava tantummodo differunt, secundùm plus, & minùs; sunt enim multæ combinationes; quas habes in duobus circulis sese invicem secantibus; tres ultimas fictitias reputo; nisi fortè 12ª ad 10, reducatur itemque 13ª de qua infra.

XI. Ansa una non longiùs extenditur, quàm alia; hinc æqualis est utriusque lucidi digressio; quia uterque communi apogæo & perigæo gaudet, & æquali motu movetur; item obscuri eodem apogæo & perigæo gaudent; ex his, perfecta ansarum & brachiorum æqualitas necessariò sequitur.

XII. Ansulæ videntur, quando portio lucidorum ab obscuris tegitur; nempe sunt quædam quasi aperturæ nigræ, quas lucida corona cingit; hæ sunt ansulæ; brachia verò, quando lucidi tangunt globum Saturni, obscuris in conjunctione existentibus.

XIII. Ansulæ eò longiùs porriguntur quo propiùs lucidi ad maximam digressionem accedunt; obscuris scilicet lucidorum partem tegentibus.

XIV. Ansulæ eò patentiores sunt, quò major obscurorum portio extra Saturnum extat, lucidis in maxima digressione constitutis; angustiores verò, cum minor obscurorum portio extat.

XV. Ansulæ latiores sunt, quando minor obscurorum portio tegit lucidos, in maxima digressione positos.

XVI.

XVI. Ansularum brachia ad ipsum usque Saturni globum excurrunt, quando minor obscurorum portio lucidos tegit.

XVII. Ansulæ à Saturni globo sunt prorsus avulsæ atque sejunctæ, quando major obscurorum portio lucidos tegit.

XVIII. Ansulæ sensim contrahuntur, quando à digressione lucidi recedunt, & obscuri ad digressionem accedunt.

XIX. Quando ansulæ latiores & majores sunt, ipse Saturni globus illustrior apparet, quia lumina quasi communi quodam nisu & illapsu oculum feriunt; sic multi ignes seorsim positi, actione quadam communi, plus calefaciunt, ac proinde majoris lucis vim diffundunt.

XX. Ansulæ sensim dilatantur & augentur, quando lucidi ad maximam digressionem accedunt, & ab illa obscuri recedunt.

XXI. Primus ille Saturni comes sub Saturno aliquando ponitur ab Hugenio, qui vult, illum circa Saturnum moveri; hoc tamen veritati repugnat; si enim sub Saturno esset, prædictas ansularum phases omnino turbaret: Idem dico de Mediceis, seu Jovialibus; igitur & Jovialia supra Jovem, & Saturnia supra Saturnum collocata fuere.

XXII. Si quando accidat, ut primus ille Saturni comes extremitati alterius ansulæ adhærere videatur; nihil enim obstat, talem illius positionem esse posse; hæc ansula paulò alterâ longior esse videbitur.

XXIII. Immo si casu aliquo stellula quæpiam alterius ansæ extremitati adhæreat. Figuræ 13ª. phasis aliquo modo salvabitur, modò ansarum forma emendetur; hæc enim trigona non est, sed convexa; ut jam dixi, de 3ª. figura: omitto alia, quæ ex his facilè deducentur.

HÆC sunt, Serenissime Princeps, quæ de Hugeniano Systemate tibi inscripto ad te scribenda, & ne probandi mo-

modum desiderares, telescopium triginta sex palmos longum, unâ mittendum esse putavi; ut & rationes nostras, ingenii, quo ad stuporem polles, & observationes, oculorum acie, accedente telescopii operâ, explorare valeas: facilè, ni fallor, judicabis, utri potiùs habenda fides sit; & an nostra telescopia Hugenianis deteriora sint: quidquid sit, si hæc opella mea tibi grata acciderit, faciam aliquando ut aliquid majoris momenti ad perennem observantiæ meæ testificationem Serenissimo tuo nomini inscribatur.

F I N I S.

CHRISTIANI HUGENII ZULICHEMII

BREVIS ASSERTIO SYSTEMATIS SATURNII SUI,

AD SERENISSIMUM PRINCIPEM

LEOPOLDUM AB HETRURIA.

Christiani Hugenii Zulichemii

BREVIS ASSERTIO SYSTEMATIS SATURNII SUI,

Ad Serenissimum Principem

LEOPOLDUM AB HETRURIA.

SERENISSIME PRINCEPS,

VIdisti quæ adversus systema meum Saturnium Romæ sunt edita, utque sub uno nomine gemini mihi adversarii exorti sint. Etsi enim Eustachius de Divinis libelli istius Annotationum autor inscribitur, eum tamen adjutum fuisse opera P. Honorati Fabrii nec Cels. T. ignorat, & ego, hoc agi, jam pridem ab amicis fueram admonitus. Credideram hoc ipso futurum ut subtiliora quædam, non mihi prævisa, éque profundiore Astronomiæ sinu depromta, objicerentur; tum vero ea civilitate & verecundia, quæ viro humanioribus studiis dedito conveniret. Sed omnino spe deceptus sum, cum nihil aliud quam observationes meas temere impugnari videam, quas plerasque in dubium vocant, præterque veritatem mihi confictas esse sa-

tis apertè criminantur. Facile autem, ut spero, tam indignam à me suspicionem repellam, nec multis ad hoc opus esse, coram C. T. causam agenti, existimo, cujus summa æquitas cum pari judicii perspicacitate conjuncta est.

Primus præcipuusque adversariorum conatus est, ut vitra sua tubosque opticos nihilo meis inferiores esse demonstrent; quod ubi egregiè se confecisse arbitrantur, inde porro, nihil me in cælo deprehendere potuisse, quod non & ipsi viderint, concludunt. Quod si autem phænomena ipsa Saturni, quæ adduxi, vera non sunt, vana utique & Hypothesis erit, qua visorum eorum quæ nusquam sunt causas exponere suscepi.

Telescopiorum suorum comparationem cum nostris instituere aliquatenus ut possent effeci, tradita accuratissima meorum descriptione; veruntamen quod præcipuum est omnium, præstantia vitrorum quæ ab exacta formatione proficiscitur, hanc scire debent nulla descriptione, sed effectu demum ipso probari posse: Ideoque etsi & longiores paulo nostris tubos, & vitra amplius patentia fabricarint, non idcirco meliora ex his telescopia sese composuisse existiment. Oportet nempe, quæ pari bonitate cum nostris futura sunt, ut & longitudine illis æquentur, & vitrorum non minore apertura gaudeant; at non ideo quæcunque sic se habuerint, eâdem virtute pollent, aut illis æquiparanda sunt.

Ut igitur reipsa & effectu concedere nostris Diviniana telescopia comprobem, certissimum argumentum mihi petere posse videor à Saturnio illo comite sive luna, quæ sexdecim dierum spatio circa eum revolvitur. Hanc primum omnium mihi conspectam esse liquet, neque id Eustachius cum sibi succenturiato P. Fabrio denegat. Quod autem nec aliis nec sibi antea animadversa fuerit, in causa fuisse ait *vel inadvertentiam, vel nimiam comitis à Saturno distantiam, vel parvitatem, vel conjunctionem.* Sed vana effugia hæc esse quis non videt? Cum enim jam ab anno 1646 & ultra fortè Saturni phases deligenter respicere cœperit, telescopio è convexis vitris composito, quo semper Saturnum simul & comi-

mitem hunc, licet triplo longius recederet comprehendi necesse erat, quænam illa fuit *inadvertentia* qua fiebat ut nunquam ei in oculos incurreret? cur non eadem mihi quoque illum subducebat, nihilo magis admonito? Quin etiam hinc patet non bene prætexi magnam à Saturno distantiam, cum quoties ad hunc respiceret, simul ante oculos sese sisteret comes ejus. Et sanè distantia illa vix tria prima scrupula excedit, cum Medicei planetæ omnes longius à Jove evagentur, extimus etiam scrupulis quatuordecim. Parvitas ergo illum occuluit. At hoc idem est quasi fateatur suis illum organis detegi nequiisse: certe enim nimium exilis erat, at mihi nequaquam.

Postea tamen edita observatione mea, cum à Clarissimo Viro Mich. Angelo Riccio esset admonitus, vidisse se stellulam hanc affirmat, indicans etiam quo ad Saturnum situ, & quoties illam observaverit. Verum cum diligentius hasce observationes examino, invenio profecto non optima fide eas commemorari; sed adeo misere vereri Eustachium ne bonitatem nostrorum telescopiorum non assecutus putetur, ut quæ nunquam in cælo vidit, aut per rerum naturam videre potuit, tamen sibi visa incogitanter afferat. Quod ut appareat, periodus primò Saturnii comitis expendatur, quam 16. circiter dierum esse, ex observationibus meis, toto triennio continuatis (nisi & has confixisse dicar) manifestum feci: sed esto tantùm ea veræ proxima sit, quoniam suas observationes *tantulum refragari* Eustachius scribit. Die igitur 30. Junii, anno 1657. horis $2\frac{1}{2}$, post solis occasum, item sequentibus diebus 2, 4, 9, 12, Julii, ad partem orientalem Saturni animadversum sibi comitem ait; 14° non apparuisse. Die 20 ad occasum fuisse situm; utrum in maxima, mediocri, an minima distantia apparuerit nusquam addit. Certe equidem tribus prioribus harum observationum, ad occasum revera positus erat, ut ex tabulis colligo. Sed putemus inversionis telescopii rationem non habuisse Eustachium, atque ita sicut ei videbatur, si tamen visus est, orientem spectasse comitem rectè dixerit. At die 9 & 12 Julii, quibus

Iiii 3 sibi

sibi orientalem itidem apparuisse asserit, omnino ad occasum transierat, ac rursus 20. Jul. ad latus orientale, cum Eustachius ab occiduo sibi repertum scribat.

TAB. LI. fig. 3. In figura apposita clarius hoc liquebit; in qua circulus A B orbitam Lunæ Saturniæ exhibet, in 16 partes divisam, ipsaque A B rectam ad nos obversam. Die igitur 30 Jun. 1657, hora 10 vesp. invenio locum comitis grad. 207. 16′ ab apogæo A, methodo scilicet ea quam in Systemate Saturnio tradidi. unde prope num. 10 constitisse debuit, paulo tantum citerior. Atque hinc porro in singulos dies singulas circuli partes numerando; sequitur die 2 Jul. ad num. 12. progressum esse. Item 4. Jul. ad num. 14. Inde post dies 5, nempe 9 Jul. ad num. 3. Ac porro 12 Jul. ad num. 6. Et denique 14 Jul. ad num. 8. qua die recte divinavit conjunctum Saturno fuisse. Reliquis verò plane infeliciter. Si enim ad num. 10, 12, 14, orientalis spectatus fuit, necessario ad num. 3 & 6 occidentalis factus est. Nec quidem ulla ratione ad num. 14 & 6, qui è diametro sibi oppositi sunt, idem latus Saturni obtinere poterat, uti Eustachii observationes postulant. Denique cum 20 Jul. ad num. 14 reverterit, ubi & die 4 Jul. inveniebatur, quomodo evenit quæso, ut, qui tunc ad orientem, idem nunc, quamvis eodem loco, ad occidentem comparuerit? Etiamsi mea periodus vera non esset, quænam tamen illa Eustachii fuerit ostendi mihi velim, paululum discrepans, qua sua hæc visa tueatur. Debuerat sane hic, si usquam, Fabrius illi opem tulisse; saltemque perpendisse an stare ullo modo istæ observationes possent: aut, si nobis imponere vellet, quotlibet duntaxat novas è tabulis meis concinnasse. Nam quas nunc adferunt, facile nimis deprehenditur, ideo tantum productas fuisse, ne nihil vidisse existimentur.

Credo & fasciam nigricantem in Saturni disco, liquido sibi conspici dixisset Eustachius, ni Fabrio visum fuisset eam nimium hypothesi meæ annulari favere. Cum autem ne optimis quidem suis perspicillis eam cerni affirmet, hinc quoque quanto illa meis deteriora sint perspicuum fit. Nam ne mihi

mihi phænomenon illud confictum credatur, idem & in Anglia pridem observari cœpisse sciendum est; ut liquet ex literis Viri Clar. Joh. Wallisii, Oxonia ad me datis 22. Dec. 1658. quibus inter alia hæc scribit. *Monebam etiam eisdem literis* (nempe datis 29. Maji, 1656) *de Saturni fascia quam jam ante observaverat D. Ball, & sciscitabar num tu eandem conspexeras*, &c. Eam porro fasciam à 5 Febr. 1656 ad 2 Jul. quo tempore rotundus Saturnus absque ansis apparuit, medium Planetæ discum secare D. Ball. adnotavit, ut in schemate ad me misso expressa est. Atque ita mihi quoque fuerat eo tempore observata, ut cernitur pag. 544 systematis Saturnii, quam figuram hîc repeto. Postmodum TAB. LI. fig. 4. tamen renatis Saturnii ansis cum difficillimè conspici eadem fascia cœpisset, minus rectè quoque à D. Ball, quantum ad situm attinet, depicta est. At in mearum observationum adversariis, die 26 Nov. 1656, & alias adscriptum invenio, lineam obscuram fuisse evidentissimam, eo nempe positu qui pag. 545. Systém. Saturnii memoratur. Neque id monere neglexissem, observationes eas recensens, si quicquam profuturum putassem apud illos qui me data opera lectores fallere voluisse suspicarentur. Difficillime autem, ut dixi, tractus hic obscurus deinceps cerni cœpit, imo vix jam amplius animadverti potest; quod & systemati meo consentaneum est, quippe magnâ jam annuli Saturnii inclinatione; ad quam accedit, quod & ansarum splendor, duplo quam alias lucidiorem Saturnum efficiens, oculorum aciem nunc magis impedit.

Qualia igitur sint Diviniana telescopia cum nostris collata, ex his quæ dicta sunt, cuilibet manifestum opinor. Eadem verò & Anglicanis viliora esse alia præterea ratione ostendam, quo minus dubitetur phænomena ea vera esse, quæ pariter cum Anglis ego observavi. Nam & illa quæ ad ansatas Saturni phases attinent, testimonio illorum confirmaturus sum. Vir quidam nobilis ex Gallia, eruditus, acerrimique ingenii, qui Romæ telescopia apud artificem istum viderat, hoc ipso anno 1660, super iis hæc ad me scribit. *Il*

me

me monstra les plus beaux de ses telescopes, qui passent au de la de 30 pieds; & nous les comparames avec un de ceux de la methode du Chevalier Neal, qu'on a envoyé au Cardinal Ghisi; il n'a garde de ne tirer l'avantage de son costé, mais sans mentir il se trompe lourdement.

Et meliora igitur Romanis esse, illa quæ ex Anglia deportata erant, judicat is qui coram comparationem utrorumque instituit, & Eustachium tamen obstinate hoc pernegare testatur, adeo ut si jam mea Romam deferam, nihil apud illum quidem sim profecturus. Quid autem huic homini facias, aut quis hæc vidêns non merito existimet, usque adeo privati compendii cura eum duci, ut quid verum sit discernere aut non possit aut nolit?

Non ægre nunc fidem habitum iri spero, tum mihi tum Anglis simul observatoribus, qui anno 1657 oblonga Saturni brachia disco utrinque conjuncta spectavimus, qualia exhibet figura Systematis mei pag. 545. quam hîc repono; non autem binorum orbiculorum formâ à medio disco disjunctorum, ut Eustachius se illa eodem tempore vidisse dejerat.

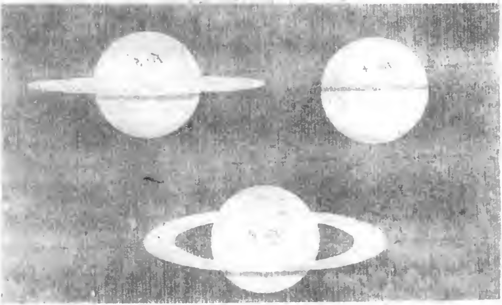
TAB. LI. fig. 5.

Adderem hîc schema quod mihi à D. Ball, suprà memorato, advenit, nisi planè simile esset huic nostro, hoc uno tantillum duntaxat abludens, quod brachia illa ubique paulo crassiora ille referat.

Eam vero formam à 5 Nov. 1656, ad 9 Jul. 1657 sibi apparuisse scribit. Apertis autem brachiis, qualis pag. 547. Systematis mei & hic repræsentatur, talem à 9. Nov. 1657 ad 7 Jun. 1658, idem observator depingit, simillima prorsus figura, nisi quod ad positum zonæ obscuræ attinet, de quo dixi suprà. Ac denique à 3 Jan. 1659 ad 17 Jun. ejusdem anni, ansis paulo latius adhuc apertis. Et hæc quidem ille, ignarus adhuc meæ hypotheseos, ne ob præconceptam opinionem aliquid indulsisse sibi existimetur. Neque ego aliter ista quam se revera habent referre auderem, cum redarguere me, si fallam, autori observationum in promptu sit.

TAB. LI. fig. 6.

Quænam igitur illa sunt Eustachii perspicilla palmorum 24, quibus rotundi globuli rectorum loco brachiorum cernebantur?



tur? Imo etiam loco ansarum jam adapertarum, quales in systemate meo pag. 546. Etenim & anno 1658 globulos tantum sibi visos ait, quales in Fig. 1. istarum tredecim tabellæ LII. Quid testes citat qui secum ista observaverint? Quos equidem fide dignissimos esse censeo, quæque viderint ingenuè fassuros, sed eo ipso mihi videntur de telescopiorum illius vitio & ineptitudine testimonium perhibere. Mallem aliquos adduxisset qui secum Saturni comitem observassent.

Globulorum formâ mihi quoque brachia apparuisse dixeram, quoties 5 aut 6 pedum tubos adhibuissem. Hisce igitur rectissime ea, atque uti debent, mihi cerni arbitratur; cum vero oblonga ac Saturni disco affixa, tubo 23 pedum referuntur, falsa imagine me deludi, idque telescopii culpa contingere. Nimirum persuadere mihi vult exigua illa omnium maximis præferenda esse, quasi ne hoc quidem discernere adhuc didicerim. Sed jam satis superque, quid de meis telescopiis observationibusque, quidque de Eustachianis existimandum sit, me ostendisse arbitror. Nec tamen quæ dixi in damnum illius cedere velim, sed potius stimulos addere, quò magis magisque incumbens, sua ipsius primo, deinde & nostra telescopia superet. Adeo enim non invideo his qui artem adeo egregiam promovere nituntur, ut decreverim etiam cuncta quæ circa eam mihi comperta sunt, sed & præcipue quæ ad theoriam Dioptrices spectant, propediem in lucem emittere: quod vel ideo mihi faciendum video, ut de veritate observatorum quæ in Saturni systemate protuli, plures inquirere possint, monstrata arte qua sibi paria nostris perspicilla parent.

Cæterum unicum etiamnum discutiendum restat Eustachii phænomenon, quo vel solo Systema meum universum corruere dicitur. Est autem rursus de genere eorum quæ non tantum non extant, sed ne quidem per rerum naturam apparere ullo modo possunt: quod, si non vitrarius artifex, at P. Fabrius certè animadvertere debuerat. Ajunt spatia illa bina, cavitate ansarum intercepta, nigriora reliquo cælo in-

veniri; cum contra, ex hypothesi mea, cælum ipsum sit quod trans aperturas eas conspicitur. Ego vero quæram ex Fabrio, qui fiat ut cælum omne, cum vel interdiu vel noctu aspicitur, non planè tenebrosum nigerrimumque appareat. Fateri cogetur in caussa esse vapores illos sive atmosphæram Terræ circumfusam, quæ interdiu quidem à Sole, noctu verò à Luna aut stellis illustretur. Atque adeo si vapores ii auferantur, planè nigrum appariturum esse cælum, æquè ac spatia illa, Saturni ansis inclusa. Atqui tota atmosphæræ illustratæ crassitudo tam inter nos ac Saturnum, quam inter nos nigrumque cæli convexum interjecta est; ergo illius interpositu æque multum de Saturniarum macularum nigredine, atque de illa quæ cælum obtinet decedere necesse est; ac proinde eæ maculæ nihilo obscuriores reliquo æthere apparere possunt. Quod si igitur nihilominus hoc sibi videri pertendant, fateantur oportet visus quadam fallacia id contingere, vicino forsitan splendore Saturni, ansarumque suarum, paulo obscuriora spatia illa reddente, quam absque eo apparitura essent. Quanquam mihi nunquam id evenit: quinimo ejus contrarium quodammodo fieri animadverti. Dum enim ansæ exigua tantum adhuc rima paterent, veluti circa 26. Nov. 1656, contigisse nullus dubito, nondum nigræ lacunæ distincte cerni poterant, sed tantum tenuiori luce, illa brachiorum pars, quæ disco Saturni proxima erat, perfusa videbatur. Qua eadem ratione & fascia in Saturno, de qua suprà, paulò tantum obscurior reliquo ejus disco cernitur, quia nempe licèt revera nigra satis vel etiam nigerrima sit, est tamen tenuissima, unde & latior simul justo & dilutior spectatur.

Atque hinc apparet, frustra etiam adversus hypothesin meam objici, quod per eam nunquam Saturnus rotundus sine brachiis videri possit; quia nempe exiguam saltem lucem in extrema annuli ora reliquisse videbar, qua futurum sit ut non penitus visum effugiat annulus, quanquam à latere inspectus nec brachia proinde in totum aboleantur. Nunc enim sciant nihil obstare quo minus omnem lucem margini annulari adimam, neque hoc absurdum in rerum natura statui Fa-

brius

brius contendet, esse nimirum materiam aliquam quæ radios solares omnino non reflectat, quippe qui de quatuor novis, quos fingit, Saturni satellitibus, duos atros, ac per se invisibiles, nullisque solis radiis illustrandos, reliquos vero splendidos esse imaginetur. Verum hypothesim illam jucundissimam postea videbimus; sunt enim alia etiam prius ventilanda quibus nostra oppugnatur.

Dixi planam annuli superficiem, eam quæ nobis obversa est, aliquando à Sole aversam non illuminari, unde nimirum nec cerni nobis tunc possit, ac proinde nullas Saturno ansulas præstet. Quod cum certissima ratione fieri demonstraverim, adversarii mei breviter atque uno verbo negant, opticisque regulis refelli dicunt. Quomodo tamen? Ponendo scilicet & Saturni distantiam & Solis diametrum longe quam ego majores, quo fiat ut superficies dicti annuli, ad nos spectans, semper quoque à Sole lumen accipiat. Atqui ego & distantiam illam & diametrum (nam una alia expendet) multo majores exhibui in Systemate meo quam alius quisquam omnium Astronomorum. Nam cum Ptolemæus & Copernicus diametrum Solis, tantum 5 Terræ diametris taxent; Aristarchus & Bullialdus 7; Ricciolus 33; Wendelinus, quo pluribus nemo, 64; ipse 111 dedi, nec sine ratione ut puto. Et Fabrio tamen parcus fuisse videor, qui Solem longe majorem etiam fieri vult, ne stare hypothesis mea possit, utque merito hanc Optices ignorantiam mihi impegisse videatur. Cum ipse interim vel Optices vel Astronomiæ usque adeo imperitus sit; ut non advertat, licet centies millies majorem quam ego Solis diametrum statuat, ac simul planetariorum orbium amplitudinem eadem proportione adaugeat, tamen diametrum illam, ex Saturno conspectam, non nisi 3 circiter scrupulorum fore; atque etiamsi tanta illinc appareret quanta nobis in Terra positis, tamen illa quam dedi demonstratione evinci, superficiem annuli ad nos versam, aliquando Solis lumine non illustrari, propterea quod planum annuli productum, inter nos Solemque transeat. Nam si hoc fieri quandoque neget, oportet statuat diametrum Solis, (quod ridiculum est) ipsius

magni orbis diametri, in quo circa Solem Tellus defertur, saltem duabus quintis partibus æqualem esse. Hoc enim ita esse facile ostendere possem, sed Astronomi ex demonstratione mea pag. 570 haud ægre deducent. Nam si planum annuli plano eclipticæ foret ad rectos angulos, non duas quintas sed integram orbis magni diametrum dicerem; duæ quintæ autem oriuntur ex inclinatione graduum $23\frac{1}{2}$ quanta est dictorum planorum.

Invenio vero & Graphices inscitiam mihi objici, quia nempe umbras quasdam, quas in schemate Saturni num. 10. Eustachius depinxit, alioqui non fuerim reprehensurus. Eum enim accersivisse quidem illas, sed necessario, contendunt, ut sphæræ formam exprimeret; quia videlicet incertum absque iis futurum fuerit, an convexus Saturnus, an planus esset. Atque ego proinde ineptus, qui *de suo* eas umbras Eustachium addidisse dixerim, quas ille ex arte, atque ita flagitante rei natura descripserit. Sed enim jocari hîc libet. Nempe cum temere citra ullam demonstrationem me statuisse arguant, Saturnum circa axem suum converti, rogo nunc illos unde tam certo compererint, Saturni medium corpus globosum esse? Non enim observatio ulla puto hoc docuit, sed colligunt tantum ex analogia quadam inter hunc & alia quædam cælestia corpora, sicut & ego de conversione circa axem. Quid igitur necessario umbras ad globum repræsentandum accersere opus erat? Verum dissimulare mihi videntur, quasi non advertant, non adeo me de medii corporis umbra sensisse, quàm de illa quam ellipticæ figuræ, binas ansas efficienti, tribuit. Huic enim ea lege umbras adjecit, ut annulum ellipticum, non planum sed rotundum, similemque serpenti caudam devoranti, exprimat; nescio enim quomodo melius formam eam designem. Deinde & hoc umbræ suæ artificio præstitit, ut totus iste annulus post globum Saturni positus videatur. Qua ex re sibi ipsi forte Eustachius absurdam aliquam Saturni formam commentus est, vel aliis certe comminiscendi ansam præbere potuit. Mihi autem, de umbra illa temere addita, necessario admonendi erant lecto-

ctores; quia si vera esset, refellebat hypothesin meam, cum alioqui schema Eustachianum, si sine umbris consideraretur, plurimum illam confirmaret. Sed & me ejusdem criminis teneri ajunt, quod passim umbras majores quam revera sint adjiciam. Nescio equidem quas dicant; semel enim Saturni globo annuloque umbras addidi, at non tanquam ita observassem, sed explicandæ hypotheseos causa, ut nempe appareret quo pacto annulum Saturno circumdedissem.

Quod si fasciam in disco ejus observatam, uti & illas quas in Jove & Marte exhibui, nigriores quàm in cælo spectantur, ob oculos poni dixissent, non ivissem inficias. Fateor enim ultro cælatoris culpa hoc accidisse; ac in Marte præsertim zonam longe dilutiorem, imprimis circa margines, pingendam fuisse. Quam neque perpetuo ibi spectari opinor, sed, ut Joviales fasciæ, mutabilem formam habere, sicut postremis in Marte observationibus didici; de quibus alias fortasse plura. Nihil autem ejusmodi mihi visum in utroque hoc planeta, Eustachius non alio argumento probat quàm cætera omnia, nempe quia ipse non viderit.

Quod Systemati Copernicano Systema meum Saturnium adaptaverim, nemo, ut opinor, jure me reprehenderit. Attamen cum Catholicis omnibus Fabrius illo interdicat, miror quod non vel hoc solo nomine rejicienda esse omnia commenta mea pronuntiet. Sed videbat, credo, facile in locum Copernicani Systematis Tychonicum me substituere posse. Utrum enim adhibeam parum admodum interest ad phænomena quod attinet. Sed rei veritas haud aliter quam Copernicum sequendo explicatur; cujus sententiam non parum quoque nostrum Saturni Systema commendat.

Non intelligo autem qui tam confidenter, hanc de Terra mota opinionem, tantùm ab hetorodoxis Aristarchis tenendam Fabrius asseveret. Quoties enim de ea cum Catholicis (Romanis nempe) sermones confero, profitentur illi se nequaquam decretis in contrarium latis teneri, sive ea à Cardinalibus, sive ab ipso summo Pontifice profecta fuerint. Quibus videlicet non tantum tribuunt in explicando sacra-

rum literarum sensu, ut etiam de controversiis quæ, ut vocant, facti sunt, necessario iis standum sit: ac plane, quietem Telluris rationibus potius adstruendam, quàm diplomatis sanciendam, existimant. Quin etiam in Gallia passim Systema Copernici non tanquam hypothesin, sed ut liquidam veritatem propugnari certum est, idque ab ipsis Ecclesiasticis, & Sacerdotibus, qui voluminibus totis publice doctrinam eam tradunt, nihil, quod sciam, Roma contradicente. Quæ omnia perpendens, pridem credidi præter Astronomiæ ignaros, imperitamque multitudinem, tantùm adhuc Cleanthes aliquos, in quibus & Fabrius, antiquo errori adhærescere, vique irrita Telluris motui obniti.

Cæterum cum mordicus, ut ait, hoc propositum teneat, ac planetas reliquos proinde nullo modo Terræ assimilandos putet, nihil mirum est, nec ferre eum potuisse Saturnicolarum ullam mentionem fieri. Ubi tamen injuria me culpat. Nam non ita de illis disserui, ut esse aliquos affirmarem, aut, rationibus adductis, verisimile id esse evincerem. Quin imo abstinere me dixi plura scribere de Astronomia, qualis incolentibus Saturnum futura esset, eo quod absurdum nimis plerique arbitrentur homines in planetis degere; qui proinde frustra me investigare dicturi essent, quid ii observent, qui in rerum natura non sunt. Cum autem, in periodo Lunæ Saturniæ computanda, menses Saturnicolarum nominavi, nihil novum aut insolitam Astronomis feci, quibus nihil frequentius est, quam ut in Sole aut Luna aliquem existere imaginentur, qui inde astrorum motus speculetur. Non erat itaque quod commentum hoc de Saturnicolis me ibi proposuisse Fabrius culparet. Quanquam etsi secus foret, neque primus ego hoc prodidissem, neque ridiculum adeo, apud Philosophos quidem, quam ille existimat. Verum præter institutum ad ista non digrediar. Vocat me Fabriani Systematis contemplatio, illius nempe quo, postquam meum diruit, phænomena circa Saturnum commodè exponi posse confidit. Nam priora illa, quibus Saturni ipsius motum novis legibus ordinare aggreditur, nihil huc pertinent, neque examinare

ea

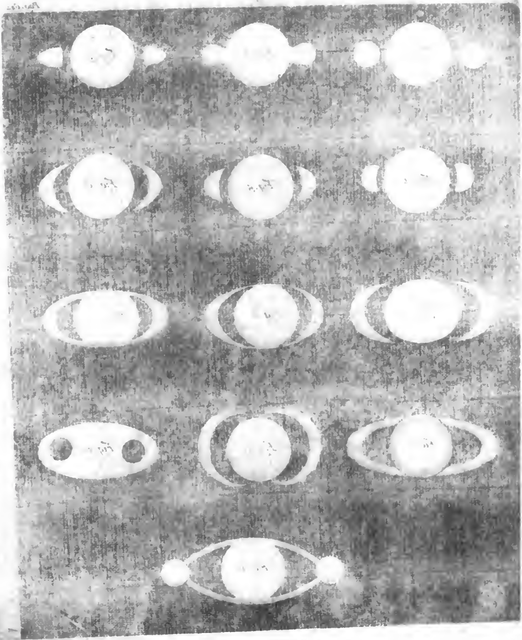
ea operæ pretium fuerit. Miror tamen quid in Tychonica hypothesi illi displicuerit, ut novam à fundamentis extruere in animum induceret: quam quidem vereor ut Astronomi satis percipere, nedum probare queant.

At nec illa quæ ad phases Saturni pertinet, ullo modo clarior est, prætereaque ab omni ratione & verisimilitudine tam longè remota, ut nesciam an refutari à me opus habeat. Cui enim imponet quæso bellum istud commentum de quatuor globulis Saturno proximis, quorum bini lumine solis splendent, bini alii radios prorsus non reflectunt, sed natura sua sunt obscurissimi. Videor mihi circulatorium quendam calculorum ludum videre, alios ibi albos, alios nigros esse, nunc hos, nunc illos ostendi abscondique vicissim. Tale quid enim præ se fert mirabilis illa hypothesis. Quidni verò circulos saltem in schemate suo expressit, quos nova hæc Planetarum soboles obeunt? Quos circulos non Saturnum in centro habere cerneremus, nec quidem minorem à majore includi, sed post tergum Planetæ binos ex ordine jacere, in quorum utroque duo istorum satellitum ita currerent, ut nunquam alter alterum assequeretur, sed è diametro semper distarent. Rectè, ni fallor, mentem Fabrii intellexi, sin minus, admoneri cupio, fuit enim nonnihil divinandum. Quum autem, his positis, phasin 1, 4, 8, 9, tabellæ suæ, facile explicari dicat, TAB. LII. scire velim quo pacto Planetæ novi ex minimis maximi fiant. Nam in 1 & 4 Figura, diametrum ne quidem dimidiam habent medii Saturnii corporis, cum in Figura 8, & 9, vel æquales huic, vel majores etiam esse necesse sit. Deinde ipsius Eustachii observata phasis in Figura 10, quomodo ex hac hypothesi deducetur? Cum neque rotunda corpora ellipticos arcus facere possint, & nigri Planetæ minores candidis hìc esse debeant, contra quam positum fuit: æquales enim inter se, post aliquantam deliberationem, statuuntur: Quænam porro sit novorum Planetarum periodus non jam exigam, nondum enim repertam esse ait. Sed vereor ut aliqua esse possit. Nam trium quidem annorum spatio, quorum primus 1646, unam illam Figuram 10 sibi apparuisse Eustachius affirmat, in tabel-

bella quadam, Sereniſſimo Magno Duci Hetruriæ, Fratri T. C. dicata; unde oportet nihil motos fuiſſe interea ſatellites, quod quidem animadverti poſſet. Poſtea vero aliis tribus annis, 1655 nempe, cum duobus inſequentibus, in tantum progreſſi fuere, ut medio horum annorum rotundus Saturnus ſpectatus ſit, extremis vero utriſque cum binis ad latera orbibus, interſtitio aliquo à medio corpore disjunctis. Utinam ridiculi Syſtematis inventori pœna conſtituta ſit, ut motuum iſtorum anomalias inveſtigare teneatur. Piget vero me ultra in his immorari: ſed tamen pauca pro meo illo Saturni comite dicere cogor. Hunc, quia videbatur aliquid in Syſtemate ſuo turbaturus, ſupra Saturnum Fabrius relegavit, ita nimirum ut totus quem percurrit circulus, Planetâ ſuperior jaceat. Sed immerito prorſus; ego enim cautionem me dabo, nihil eum anſatis illis phaſibus occurſu ſuo nociturum, cum puſillus adeo ſit, ut ne quidem, cum prope ad Saturnum accedit, conſpici queat: raro etiam, nec niſi cum rotundus eſt Saturnus, inter diſcum ejus & nos tranſeat, idque ſemidiurno ſpatio. Sinat itaque in ſua illum manere orbita, unáque Mediceos Planetas in vias ſuas, à Magno olim Galilæo circa Jovem attributas, reſtituat, quos nullam omnino ob cauſam, quam quidem aut ipſe adducit, aut ego animadvertere poſſum, loco ſuo ſimiliter expulit.

Jamque percenſui, ni fallor, Princeps Sereniſſime, omnia quæ adverſus me Euſtachius de Divinis, ſeu potius P. Fabrius conquiſivit, quæve ad ſuam hypotheſin ſtabiliendam commentus eſt, quæ quum animo reputo, nulla ſane invenio, quibus non pro me ſibi eruditi reſponſuri fuerint, aut venturi temporis experientia. Interim pauca hæc repoſuiſſe non me pœnitet, quia, licet artificem illum merito neglexiſſe tacendo videri poteram, non idem fortaſſe contra alterum, quem ferunt alicujus nominis eſſe adverſarium, valiturum erat ſilentium; utique quum ſatis omnibus conſtet pleraque ab hoc fuiſſe ſuppeditata, multique, non tam quid, quam à quo ſit objectum, reſpiciant. De cætero rogo C. T. ut, qua uſus ſum in diſputando, libertatem boni conſulat: Idque ita, ſi & provocatus in arenam hanc deſcendi, & juſtæ defenſionis terminos nuſquam tamen exceſſi.

FINIS.



CHRISTIANI HUGENII

DE

SATURNI ANNULO

OBSERVATIONES.

CHRISTIANI HUGENII

DE

SATURNI ANNULO OBSERVATIONES.

I.

Observationes in Saturnum Parisiis habitæ in Bibliotheca Regia.

ANno 1668, 17 Aug., hora 11 vespertinâ D^ni Hugenius & Picart observarunt Planetam Saturnum ope telescopiorum 21 pedum & invenerunt figuram ejus talem qualem hic exhibemus, globo in medio manifeste excedente supra & infra ovalem quod vix dum anno præcedenti erat conspicuum. TAB. LI. fig. 1.

Mensurarunt diversimode inclinationem magnæ diametri Ovalis ad æquatorem, quæ inventa est circiter 9 graduum, licet eo empore tantum debuerit esse 4 graduum, secundum illa, quæ D. Hugenius dixit in Systemate Saturni, planum annuli, qui circumdat globum Planetæ cum plano Eclipticæ tantum efficere angulum 23. gr. 36; sed cum ultima hæc observatio, & similes aliæ hujus anni & præcedentis, magis exactæ sint & habitæ tempore magis opportuno ad mensurandam obliquitatem, illis, quæ fundamentum fuere memoratæ detereminationis, D^us Hugenius invenit, loco 23 gr. 36 angulum plani Annularis & Eclipticæ esse circiter 31 graduum; & hoc posito, non solum formam, quam jam ha- *Vera annuli inclinatio.*

bet Saturnus, sed & omnes illas, quas observarunt Astronomi ab illo tempore a quo veras observare potuere, congruere perfecte cum hypothesi annuli, & peculiariter observationem D^ni^ Campani, Anni 1664 initio Julii, quam ipse publici juris fecit, in quo magna Ovalis diameter duplicatæ minori diametro æqualis est.

Phasis rotunda. Quod autem ad rotundam Saturni Phasin attinet, non potest nisi parum admodum tempus hujus mutari, ex memorata mutata inclinatione ita ut D^us^ Hugenius adhuc dum phasin hanc rotundam expectet anno 1671, in quo æstate ansas amittere inchoabit, quas nisi post annum circiter recuperabit, juxta illa quæ tradidit in Systemate Saturni.

II.

Excerpta ex literis D. Hugenii, Academiæ regiæ scientiarum socii, ad auctorem Diarii Eruditorum de figura Planetæ Saturni.

Brachia Saturno renata. Cum Saturnus abdicaverit figuram suam rotundam postquam hoc anno 1672 ex radiis solaribus emersit, uti anno præcedenti prædixeram, & cum illi brachia sint renata; ultima mutatio non minus meretur, ut in Diariis vestris notetur, quam quædam aliæ præcedentes, quarum ibidem mentionem fecisti.

Ultimum in conjunctione cum Sole fuit Planeta hic 12 Martii præterito, in 22 gr. 35 min. Piscium; magna autem obliquitas hujus loci Zodiaci ad nostrum horizontem, quando oritur, in causa fuit quo minus tribus mensibus, aurora prohibende, videretur; nam 5 Junii tantum D^us^ Cassini primum illum potuit observare, cum brachia Saturni jam facta essent adeo clara & ampla, ut inde colligi debuerit, jam à longo tempore fuisse instaurata; Observabat etiam in disco Saturni parvam umbram ad latus septentrionale brachiorum, pa- *Umbra in disco Saturni.*

ri-

riter ac exhibui in Systemate Saturni Tab. XLIX. *fig.* 6.; quod, æque ac instaurata brachia, congruit cum iis quæ statui in illo Systemate de annulo, quo cingitur Saturnus. Sed quoniam hæc hypothesis præcipue confirmatur observationibus, quas ultimo anno fecimus, quarum quædam nondum cum publico communicatæ fuere, ut mihi veniam concedas rogo has nunc memorare, cum annotationibus, quas ad eas feci.

Anno 1671 Saturnus apparuit rotundus sine brachiis aut ansis uti prædixi ante annos 14, quum publici juris feci meum Systema, licet id acciderit duobus mensibus prius quam expectaveram, scilicet in fine mensis Maji. Percepta deinde est quædam interruptio figuræ rotundæ, quam non prævidi, & quam difficulter admodum prævidere potuissem, quia Saturnum tantum observaram per unicum annum, cum hæc vaticinarer. Sed nosti, quam primum intellexerim, brachia rediisse, quod D^us Cassini observavit 11 & 14 Augusti, me affirmasse illa certo certius brevi iterum peritura, quod quoque verum repertum est; nam 4 Novembris brachia Saturni erant adeo obscura, ut dubitarem an quidem iterum apparerent, licet D^us Cassini affirmet se illa percepisse ultimâ vice 13 mensis sequentis Decembris, post quod tempus figura rotunda duravit, donec Saturnus in radios Solares se abscondit.

Hæc ultima brachiorum Eclipsis præcipue veritatem meæ hypotheseos probat; facile enim patet quam difficile fuisset secundam prævidere mutationem, priori adeo vicinam, nisi illius veram causam perspectam habuissem; præterquam quod modus, quo brachia secunda vice ablata fuere is ipse sit, quem statui in meo Systemate. Vidimus enim illa pedetentim deficere à claritate suâ, licet semper manserint satis ampla; quod erat certum indicium, radios solis valde oblique illustrare superficiem annuli Saturni, quæ ad nos conversa erat, quam tandem non amplius illustrarunt sed quidem oppositam. In præcedenti apparitione figuræ rotundæ, à fine Maji usque ad 14 Augusti, brachia latebant, non quia non illustrabantur, sed quia visus noster, parum admodum *Saturnus rotundus.*

 vel

vel omnino nihil elevatus erat supra superficiem annuli, quem Sol intuebatur.

Linea æquinoctialis annuli. Hæc omnia tantum illis scripta sunt, qui cum cura examinarunt, quæ tradidi in Systemate Saturni: & pro iis adhuc addo, quantum attinet ad lineam æquinoctialem vel rotundæ apparitionis Saturni, quæ linea formatur intersectione annuli & plani orbitæ planetæ, me nullis cogi observationibus, ad situm illius mutandum quem in Systemate Saturni præscripsi in 20½ gr. Piscium & Libræ. Quoties Saturnus è Sole visus perveniet ad illa Zodiaci loca, rotundus apparebit, etiam quando ab hisce tantum duobus gradibus removetur; nam ex observationibus anni ultimi percepi ita restringendos esse limites quos 6 graduum statueram, ut satis facerem quibusdam Galilæi & Gassendi observationibus, quorum Telescopia minoris notæ fuerant, quam credere ausus eram. Juxta ultimas hasce limitationes minus apparitiones formæ rotundæ Saturni durabunt quam ipse olim prædixi; ita ut anno 1685 non initio mensis Martii, sed mense Julio, brachia amittet Saturnus prope finem apparitionis suæ, & illa recuperabit sequenti mense Novembri; pariter 1701 non poterit videri rotundus, nisi mense Junio, initio suæ apparitionis, & mense Augusto brachia ejus incipient renasci.

Antequam finem huic scripto imponam, hic addam, Tabulam, quam dedi pro motu parvæ Lunæ, vel stellæ, quæ comitatur Saturnum, & circa illum volvitur 47 minutis minus quam 16 diebus, huc usque repertam esse adeo observationibus congruam, ut nondum videre queam, sitne quidpiam addendum vel detrahendum.

F I N I S.

CHRISTIANI HUGENII
ΚΟΣΜΟΘΕΩΡΟΣ,

SIVE

De Terris Cœleſtibus, earumque ornatu,

CONJECTURÆ

AD

CONSTANTINUM HUGENIUM,

Fratrem:

GULIELMO III. MAGNÆ BRITANNIÆ REGI,
A SECRETIS.

Horat. Epist. 6. lib. I.

Hunc solem, & stellas, & decedentia certis
Tempora momentis, sunt qui formidine nulla
Imbuti spectent: quid censes munera terræ
Quid maris extremos Arabas ditantis & Indos?
Ludicra quid, plausus, & amici dona Quiritis,
Quo spectanda modo, quo sensu credis & ore?

BENEVOLO LECTORI
SALUTEM.

Libellus hicce jam ad umbilicum deductus, & prælo destinatus erat, cum maximo rei literariæ damno Illustrem ejus Auctorem primum morbus, dein mors occupavit. Qui tamen ut in lucem prodiret, cavit, ultima voluntate fratrem, ad quem scriptus est, rogitans, hujus ut edendi curam suscipere vellet. Cui rei Nobilissimo Viro innumeris occupationibus & peregrinationibus, utpote qui Magnæ Britanniæ Regi ad res Batavas à secretis esset, distracto vacare non licuit, nisi anno ferme post Auctoris obitum. Qua re, intercedente deinde etiam Typothetarum mora, factum est, ut cum editioni jam omnia pararentur, & hic Vir fato cesserit, adeoque & Parente & eo, qui post parentis obitum ejus vicem gerebat, & ad quem destinatus erat, destitutus fuerit hic Libellus. Eadem tamen, qua ab Auctore conscriptus erat, ratione, eademque ad fratrem, licet jam defunctum, inscriptione, (Re-

ligio enim fuit quidquam immutare) prodit in publicum, non dubia spe, fore, ut eruditi, sicut reliqua omnia Auctoris, sic & ultimum hunc ejus fœtum benigne accipiant. Demonstrationes equidem Mathematicas non invenient ubique, neque enim res patitur, sed, quo in his rebus nihil ultra desiderari jure posse videtur, verisimiles & ingeniosas conjecturas. Quæ ex cœlorum notitia depromi potuerunt, ea hic videbunt ratione demonstrata; quæ ex iis non patent, ex cœlestium corporum cum tellure nostra affinitate solerter conjecta. Verum hujus quid sit, ex ipso Auctore commodius perspicies. Vale.

CHRISTIANI HUGENII
COSMOTHEOROS,

SIVE

De Terris Cœlestibus, earumque ornatu, Conjecturæ.

AD

CONSTANTINUM HUGENIUM,

Fratrem.

LIBER I.

Fieri vix poteſt, Frater optime, ſi quis cum Copernico ſentiat, Terramque, quam incolimus, è Planetarum numero unum eſſe exiſtimet, qui circa Solem circumferantur, ab eoque lucem omnem accipiant; quin interdum cogitet haud a ratione alienum eſſe ut, quemadmodum noſter hic Globus, ita cæteri quoque iſti, cultu ornatuque, ac fortaſſe habitatoribus non vacent. Præſertim ſi ad ea quoque reſpiciat quæ poſt Copernici tempora in cœlo deprehenſa ſunt; Comites nempe ſtellarum Jovis & Saturni, Lunæ montes campoſque, & alia multa; quibus non ſolum veritas inventi ab illo ſyſtematis, ſed & ſimilitudo ac cognatio, Terram inter & Planetarum corpora, magnopere confirmatur. Itaque & nobis, cum prælongis Teleſcopiis ſidera unà ſpecularemur; quod jam per multos annos, propter occupationes tuas & continuam fere abſentiam,

tiam, non licuit; sæpius ea de re sermones habitos memini. Qualia vero essent, quæ in istis regionibus extarent Naturæ opera, id ne sperandum quidem esse ut unquam sciri possit, frustraque proinde quæri, certo credebamus. Neque vero aut a priscis Philosophis, aut a recentioribus quidquam ejusmodi tentatum fuisse comperi. Nam inter illos quidem, jam ab ipso Astronomiæ exortu, cum primum Sphæricam esse Terræ formam intellectum est, eamque undique æthere cingi, fuere qui auderent alios esse in sideribus mundos, imo innumerabiles dicere. Posteriores vero, ut Cardinalis Cusanus, Brunus, Keplerus, qui & Tychonem Braheum idem sensisse scribit, Planetis quidem incolas suos tribuerunt; Cusanus & Brunus etiam Soli, & stellis inerrantibus: nihil tamen ulterius aut hi aut illi quæsivisse inveniuntur; neque etiam nuperus auctor Gallicus dialogi ingeniosi de Mundorum multitudine. Tantum fabulas quasdam de Lunæ populis nonnulli contexuerunt, animi causâ, Lucianicis, quas nosti, haud multo verisimiliores. Nam & Keplerianas his annumero, quibus ille in somnio Astronomico ludere voluit. Mihi vero, qui tot viris egregiis nequaquam me perspicaciorem esse existimo, sed eo feliciorem, quòd post illos, tantùm non omnes, natus sim; cum ab aliquo tempore diligentius ista meditari cœpissem, visum est non prorsus obseptas esse, de rebus tam procul dissitis, inquirendi vias, sed verisimilibus conjecturis abunde materiam præberi. Quas conjecturas meas, prout sese subinde obtulerunt, in adversariis annotatas, nunc in ordinem redigere, tibique exponere volui; atque aliquid etiam adjicere de Sole, Stellisque inerrantibus, & mundi magnitudine, cujus particula quædam minima est totius Systematis nostri complexus. Et hæc quidem, pro solito tuo res superas cognoscendi studio, libenter te lecturum arbitror. Mihi certe scribere ea jucundum fuit; utque sæpe aliàs, ita nunc, velut in re ipsa, verum esse expertus sum illud Archytæ; *Si quis in cælum ascendisset, naturamque mundi & pluchritudinem siderum perspexisset, insuavem illam admirationem ei futuram*

Fuisse qui Planetis incolas tribuerint, sed nihil præterea de iis inquisivisse.

(*quæ*

(*quæ alioqui jucundissima fuisset*) *nisi aliquem cui narraret habuisset*. Utinam vero hæc nostra narrare non omnibus possem, sed præter te lectores arbitratu meo deligere liceret, qui nec Astronomicæ scientiæ, nec Philosophiæ melioris rudes essent; quibus facile conatus hosce probatum iri, nec, propter novitatem, defensione opus habituros confiderem. Quia vero & in imperitiorum manus venturos provideo, & fortasse quorumdam severiora judicia subituros, puto non abs re fore ut utrorumque reprehensiones jam hinc repellere coner.

Atque erunt quidem, qui cum Geometriam aut Mathematicas nunquam attigerint, omnino vanum ac ridiculum hoc inceptum nostrum censebunt. Incredibile enim iis videtur, ut Siderum distantias, aut quæ sit magnitudo eorum, metiri possimus. Tum vero motum huic Terræ aut falso adscribi existimant, aut nequaquam adhuc probatum esse. Quare nihil mirum, si, quæ talibus fundamentis exstruuntur, pro somniis nugisque sint habituri. Quid vero his dicemus, nisi aliter sensuros si disciplinis istis, naturæque rerum contemplandæ, operam dedissent. Hoc vero longe plurimis non licuisse scimus, vel quod ad ea parum ingenio comparati essent, vel quod unde discerent non haberent, vel denique quod suis, aut reipublicæ curandis negotiis, alio vocarentur. Itaque nihil eos reprehendimus; sed, si diligentiam in his rebus nostram condemnandam putabunt, ad magis idoneos judices provocamus.

Occurritur objectionibus imperitorum.

Erunt alii qui ea, quæ verisimilia esse ostendere conati sumus, Sacris Literis adversari prædicent, cum de Terris animalibusque, atque etiam ratione præditis, nos disserere animadvertent; de quorum origine, aut quod omnino in rerum natura extent, nihil illic traditum sit, sed ea potius ex quibus contrarium sequatur. Tantum enim de Tellure hac, cum suis animantibus, herbisque, & homine omnium domino commemorari. Quibus respondeo, quod & ante me alii, satis apparere non de omnibus iis, quæ Deus creavit, particulatim nos edoceri eum voluisse. Itaque cum vel

Conjecturas hasce S. Scripturis non adversari.

Siderum vel Terræ nomine, in prima Genesi, etiam Planetæ, qui præter Solem Lunamque sunt, comprehendantur; atque etiam Jovis & Saturni Comites; posse non tantum plures alios utriusque generis includi, sed & res innumeras quas in superficie eorum summo opifici collocare placuerit. Porro non nescire eos quo pacto interpretandum sit, quod dicitur omnia propter hominem condita esse; neque eo significari, ut a pluribus jam est animadversum, tot ingentia corpora stellarum, quas partim videmus, partim nec vidissemus quidem unquam, si Telescopiorum auxilium defuisset, nostræ utilitatis aut contemplationis gratia fuisse condita; quia id absurde diceretur. Quare cum operum Dei magna pars extra conspectum hominum sit posita, neque ad eos pertinere videatur, haud alienum esse opinari, aliquos extare, qui illa propius aspiciant & admirentur.

Inquisitionem horum ut nimis curiosam reprehendi non debere.

Sed dicent fortasse, cum de his ipse supremus auctor nihil amplius docuerit aut revelarit, credendum esse sibi scientiam eorum reservasse, ac proinde temere, & curiose nimis de iis inquiri. At nimium ipsos sibi sumere ajo, si definire velint, quousque homines investigando progredi debeant, diligentiæque eorum modum statuere; ac si terminos, quos hic Deus præscripsit, certo cognitos haberent; aut in hominum potestate esset illos prætergredi. Et sane, si talibus scrupulis retenti fuissent qui ante nos vixerunt, adhuc ignorari potuisset quænam Telluris esset figura, aut quæ magnitudo, & num aliqua Americæ regio. Item an Solis radiis Luna illustraretur, quibusve ex causis aut hæc aut ille deficerent; ac pleraque alia, quæ Astronomorum laboribus repertisque accepta referimus. Quid enim tam absconditum & inaccessum videbatur, quam quæ de rebus cœlestibus in aperta luce nunc posita sunt? Ex quo intelligitur industriam mentisque acumen hominibus data esse, quibus paulatim rerum naturalium cognitionem consequerentur; neque esse cur conari desinamus & ulteriora inquirere. Attamen reconditiora illa, quibus hic præcipue insistimus, scimus non esse ejusmodi, ut quærendo penitus investigari possint. Itaque nihil veluti cer-

certum affirmamus, (qui possimus enim ?) sed conjecturis tantum agimus, quarum de verisimilitudine suo cuique arbitratu judicare liberum sit. Quod si quis irritam igitur, & inanem in his operam nos ponere dicat, de rebus iis conjecturas prodendo, de quibus ipsi fateamur nihil certi unquam comprehendi posse: respondebo totum Physices studium, quatenus in causis rerum eruendis versatur, eadem ratione fore improbandum; *ubi verisimilia invenisse laus summa est, & indagatio ipsa rerum, tum maximarum, tum occultissimarum, habet oblectationem.* Sed verisimilium multi sunt gradus, alii aliis veritati propiores, in quo diligenter æstimando præcipuus judicii usus vertitur.

Conjecturas non esse vanas, quia non plane certa.

Ut vero mihi videtur, non tantum res ad cognitionem maximas hic indagamus, sed quarum contemplatio studiis quoque sapientiæ multum conducat. Expedit nimirum ut, velut extra Tellurem hanc positi, procul eam intueamur, quæramusque, an sola sit in quam omnem ornatum natura contulerit. Ita enim rectius quid sit, quoque loco habenda, intelligere poterimus: quemadmodum qui longinquas regiones obeunt, de patriæ suæ rebus verius judicare solent, quam qui nunquam inde se moverunt. Nec sane ille magnopere admirabitur quæcunque hic vulgo maxima habentur, qui, rationibus nostris aliquid tribuens, multitudinem Terrarum nostræ similium, similiterque incolis suis frequentatarum, sibi proposuerit. Deum vero, tantarum rerum effectorem, qui poterit idem non valde suspicere & venerari? cujus providentiam, sapientiamque mirabilem, passim hic assertam inveniet, contra falsas opiniones eorum, qui vel ex fortuito corpusculorum concursu ortam esse Terram, vel omni principio eam carere dixerunt. Sed jam ad propositum.

Ad sapientiam & pietatem facere quæ hic tractantur.

Et quoniam maximum sumetur argumentum, ad ea quæ instituimus probanda, ex ordinatione Planetarum Copernicea, quodque inter eos Tellus hæc haud dubie numeratur; bina schemata hic initio describo, quorum alterum orbes eorum, circa Solem dispositos, continet, veris proportioni-

TAB. LIV. fig. 1.

nibus expressos; simile illi quod in Automato nostro sæpius conspexisti: alterum rationes magnitudinum ostendit, quibus corpora Planetarum inter se, & ad Solem, comparantur; quod in eodem Automato adjectum est. In priore punctum medium Sol est; à quo deinceps, noto omnibus ordine, sunt orbitæ Mercurii, Veneris, Telluris, cum superaddita via Lunæ; tum Martis, Jovis, & Saturni: ac circa Jovem, Saturnumque circelli Comitum; illius quatuor, hujus quinque. Quos circellos, cum eo, qui Lunæ nostræ dicatus est, longe majores hic poni sciendum, quam pro ratione ad Planetarum primariorum orbitas; ne, ob parvitatem, penitus visum effugerent. Orbitarum vero quanta reipsa sit vastitas inde intelligere licet, quod distantia a Sole ad Terram, decem vel duodecim millia Terræ diametrorum continet: de qua mensura pluribus postea agetur. Omnes porro in eodem fere plano sitæ sunt; ut proinde non multum discedant ab eo in quo Tellus circumit, quod Eclipticæ planum vocatur. Hoc vero oblique secatur ab axe Telluris, in quo illa volvitur horis viginti quatuor, respectu Solis: isque axis, nisi quod mutationem lentissimam subit, quam norunt Astronomi, sibi ipsi parallelus manet, dum ipsa circa Solem defertur; ex quo dierum noctiumque oriuntur vices, itemque temporum anni commutationes, ut passim docent eorum libri. Unde & tempora periodorum, quibus circuitus suos Planeta quisque peragit, huc transcribo. Nempe Saturni, annorum 29, dierum 174, horarum 5. Jovis annorum 11, dierum 317, horarum 15. Martis proxime dierum 687. Telluris dierum 365¼. Veneris dierum 224, hor. 18. Mercurii dierum 88.

TAB. LV. fig. 1. *Copernici systema exponitur.* *TAB. LIV. fig. 1.*

Hic est ille, notissimus jam, cælestium corporum ordo, a Copernico repertus, idemque naturæ simplicitati convenientissimus. Hunc si quis convellere aut improbare contendat; is discat primum, ex demonstrationibus Astronomorum, quanto in hac descriptione melius faciliusque omnium eorum, quæ circa motum siderum animadvertuntur, ratio reddatur, quam in Ptolemaico aut Tychonis systemate. Cogno-

Copernici doctrinam quæ rationes confirment.

noscat etiam, ex singulari Kepleri observatione, quomodo Planetarum, interque eos Telluris, a Sole distantiæ temporibus periodorum, quas retuli, certa quadam proportione respondeant; quam postea Jovis quoque & Saturni Comites, horum respectu, servare deprehensum est. Intelligat quam contra motus naturam quiddam comminiscendum sit, quo demonstretur cur stella Polaris, in extrema cauda minoris Ursæ, exiguo nunc circulo moveatur, duobus gradibus & tertia parte à Polo distans; cum ante annos mille octingentos viginti, ætate nempe Hipparchi, duodecim gradibus, 24 scrupulis, ab eodem Polo abfuerit: post aliquot vero sæcula, ad 45 gradus inde recessura sit, & post annorum viginti quinque millia, eodem quo nunc est, reversura. Ut proinde cælum totum, si circumrotari dicatur, super alio atque alio axe id faciat necesse sit, quod est absurdissimum; cum in Copernici hypothesi nihil sit explicatu facilius. Denique expendat omnia illa, quibus, ad argumenta Copernico objici solita, Galilæus, Gassendus, Keplerus, aliique plurimi responderunt. Quorum rationibus ita sublati sunt qui supererant scrupuli, ut omnes nunc Astronomi, nisi tardiore sint ingenio, aut hominum imperio obnoxiam credulitatem habeant, motum Telluri, locumque inter Planetas, absque dubitatione decernant.

Planetarum magnitudinis inter se & ad Solem ratio. TAB. LV. fig. 1.

In altero, quod dixi, schemate, ita horum globi cum Sole oculis subjiciuntur, ac si juxta se positi essent. Atque hic rationem diametrorum, ad Solis diametrum, eam secutus sum, quam tradidi in libro de Saturni Phænomenis. Nempe Annuli Saturnii eam quæ 11. ad 37; Globi inclusi, ad eandem Solis diametrum fere, quæ 5 ad 37; Jovis, quæ 2 ad 11; Martis, quæ 1 ad 166; Telluris, quæ 1 ad 111; Veneris, quæ 1 ad 84; quibus nunc addo Mercurii, quæ est 1 ad 290 ex Hevelii observatione Anno 1661 habita; cum in Solis disco Mercurius conspiceretur, nostro tamen, non illius calculo.

Quomodo autem hæ nostræ magnitudinum rationes inventæ sint, tum ex cognita proportione distantiarum à Sole, tum

ex mensura Diametrorum, Telescopiis capta, eo, quem dixi, libro ostendi: neque adhuc video cur multum, ab iis quas tunc definivi, recedam; etsi nihil eis deesse non contenderim. Nam quod multi existimant, in metiendis apparentibus diametris, præstare lamellis nostris usum Micrometrorum quæ vocant, quibus fila tenuissima in foco Lentis majoris prætenduntur, nondum iis assentiri possum, sed aptiores esse lamellas virgulasve tenues arbitror, quas eo loco objiciendas docueram. Ex quo istud Micrometrorum inventum, itemque Telescopii ad organa Astronomica adaptatio, non multo post emanavit: non sine laude tamen eorum, qui in perficiendo tam utili invento elaborarunt.

Micrometris præstare lamellas virgulasve tenues.

Cæterum, in hac planetarum comparatione, notanda est ingens Solis magnitudo, cum interioribus quatuor Planetis collata; utque hi Saturno quoque, ac Jove, longe longeque minores sint. Nam considerandum, non ordine crescere eorum corpora cum distantiis a Sole; quippe cum multo major sit Veneris, quam Martis, globus.

Solem Planetis multo majorem esse.

His de utroque Diagrammate expositis, nemo, ut puto, jam non videt, quam clare ex priore, in quo systematis est typus, sequatur, eodem genere, cum cæteris quinque Planetis, Tellurem hanc nostram contineri. Nam vel ipsi circulorum positus hoc testantur. Atqui præterea constat, telescopiorum observationibus, & globosa esse omnium corpora, itidem ut Telluris, & à Sole splendorem similiter eos mutuari. Ac denique in hoc quoque ei similes esse, quod in se ipsis circum proprios axes volvantur: quis enim de cæteris dubitet, cum in Jove & Marte hoc certo compertum sit? Sicut autem Tellus Lunam comitem habet, ita Jupiter & Saturnus suas. Quid igitur tam probabile est, cum in his tot rebus Telluri cum Planetis illis primariis intercedat similitudo, quam non minori quoque dignitate & pulchritudine eos esse, nihiloque minus ornatos cultosque: aut quænam cur hoc aliter se habeat ratio excogitari potest?

Tellurem Planetis, & hos Telluri recte assimilari.

Sane si cui, in dissecti canis corpore, viscera ostenderentur, cor, stomachus, pulmones, intestina; tum venæ, arte-

Ex similitudine in hisce recte argumenta peti.

teriæ, nervi; etiamsi nunquam animalis corpus apertum conspexisset; vix dubitaret, quin similis quædam fabrica, ac partium varietas, in bove, porco, cæterisque bestiis inesset. Nec si unius, ex Saturni aut Jovis Comitibus, naturam cognitam haberemus, non eadem fere quæ in illo, in cæteris quoque reperiri putaremus? Similiterque ex uno quopiam Cometa, si quidnam esset perspici posset, eandem omnium rationem esse statueremus. Itaque plurimum ponderis habet illa ex similitudine petita, & à rebus visis ad non visas producta ratio. Quam proinde sequentes, ex Planeta uno, quem coram aspicimus, de reliquis ejusdem generis rectè conjecturam faciemus.

Planetas solidos esse & gravitate pollere.

Ac primùm quidem, non aliter quam Tellus nostra, solido corpore eos constare existimabimus. Deinde prorsus etiam verisimile censebimus, adesse globis eorum id quod gravitatem appellamus; cujus vi corpora quæque, in superficie eorum hærentia, premant eam; aut, si dimoveantur, ex omni parte velut attracta recidant. Quod ex ipsa quoque globi forma liquet, cum hæc ex conatu corporum, ad centrum unum tendentium, generetur. Imo jam, certo quodam ratiocinio, colligere didicimus, quanto majus minusve in Jove ac Saturno, quam apud nos, gravitatis momentum esse debeat. Qua de re, deque auctore ejus, in Diatriba de Causis gravium diximus.

Nunc vero ulterius quærere pergamus, quibus gradibus ad penitiora quædam, de statu ornatuque Terrarum istarum, cognoscenda perveniri possit. Ac primùm quam verisimile sit herbas, & animalia in earum superficie existere, æque ac in Tellure nostra. Nemo negabit puto, & formam & vitam, & crescendi generandique rationem, in stirpibus animantibusque majus quid esse, magisque mirandum quàm corpora vitâ carentia, quantumvis mole conspicua sint; velut montes, rupes, maria. Patet etiam in utroque illo viventium genere, multo aliter longeque expressius, cerni Divinæ providentiæ intelligentiæque præstantiam. Cum

Nec deesse illis animalia.

enim quæ in Terra, imo quæ in Cælo quoque aspicimus, aliquis Democriti, aut etiam Cartesii sectator, ita se explanaturum profiteri possit, ut tantum atomis & motu horum indigeat; in herbis tamen & animalibus frustra erit, nec de primo eorum exortu quidquam verisimile adferet; cum nimis manifesto appareat, nunquam vago, ac fortuito corpusculorum motu, talia quædam prodire potuisse: quippe in quibus omnia ad certum finem egregie apta accommodataque cernantur; cum summa prudentia, & legum naturæ, ipsiusque Geometriæ, cognitione exquisita, quemadmodum in sequentibus sæpius ostendetur: ut jam omittamus illa in progignendo miracula. Quod si igitur in Planetis nihil aliud quàm vastæ solitudines, corporaque inertia, & vita carentia reperiantur; atque absint ea in quibus clarissime certissimeque Architecti supremi sapientia elucescit; haud dubiè multum dignitate & pulchritudine concedent Telluri nostræ: quod, ut jam dixi, rationi adversatur.

Non igitur sic; sed erunt & ibi corpora quædam motu prædita, sesque ipsa moventia, neque his quæ in Terra sunt ignobiliora; adeoque erunt animantia. His autem positis, jam de herbis quoque fere necessario concedendum est; ut sit aliquid quo illa alantur. Omnia verò hæc non aliter quam in superficie Planetariorum globorum existere, dubitari non potest; cum calore Solis gaudere ac foveri debeant; cujus radiis, non secus quam Tellus nostra, expositi sint.

Et nec plantas.

Sed dicet aliquis, celerius quàm par est, hic nos progredi. Nam, ut non negetur res aliquas in Planetarum superficie reperiri, quæ ibi crescant & moveantur, Deoque auctore, non minus quam nostra hæc, dignæ sint; longè diversam tamen earum posse esse naturam, ut nec materia, nec crescendi more, nec extrinseca forma, aut internis partibus, quidquam iis, quæ apud nos sunt, simile habeant: ac talia sint denique, ut nihil ejusmodi in mentem homini venire possit. Hoc igitur jam quæramus quam sit verisimile; & an non potius credendum sit, non tantam esse diversitatem

quan-

quanta existimetur. Favet eorum sententiæ, qui omnia alia illic imaginantur, quod Natura videatur varietatem plerumque, & plurimis in rebus, sectari; quodque Conditoris potentia hoc ipso magis declaretur. Sed cogitare debent, non esse hominum arbitrio definiendum quàm magna ista sit varietas ac dissimilitudo. Neque, quia possit esse immensa, resque illæ ab intellectu, & comprehensione nostra penitus remotæ, idcirco necesse esse, ut reipsa tales existant. Quamvis enim similia omnia iis quæ apud nos sunt, finxisset Deus in cæteris Planetis; nihilo minor esset spectatoribus eorum, si qui sunt, admiratio, quam si plurimum distarent: cum, quid in aliis effectum sit, nullo modo possint cognoscere. Potuisset in terris Americæ, aliisque longè remotis, aliqua creasse viventia, quæ his nostris nihil simile haberent; neque id fecit tamen. Nam formarum quidem diversitatem aliquam esse voluit, quibus animalia herbæque nostræ à transmarinis illis, dissiderent, sed & in his ipsis formis, inque crescendi & generandi modis, multa utrisque convenire fecit. Habent enim & illic animalia pedes, alas; atque intus cor, pulmones, intestina, vulvas; cum hæc omnia in unoquoque genere illorum, ac nostratium quoque, planè diversa ratione ordinari potuerint, ab infinitæ solertiæ opifice. Non igitur omnem varietatem quam poterat in rebus creatis, earum auctor exhibuit, nec proinde argumento illi, quod a Naturæ novandi studio petitur, tantum tribuendum est, ut omnem, qui in cæteris Planetis est, ornatum ab eo, qui in Terra nostra conspicitur, prorsus alienum putemus. At contra credibile est, inter ea quæ in superficie istorum globorum generantur, quæque apud nos sunt, præcipuam esse differentiam, quæ ex majori, minorive, eorum a Sole, caloris vitæque fonte, distantia oriatur. Propter quam tamen magis materiam, quam formam rerum, variari necesse sit.

Non nimiam in hisce fingendam dissimilitudinem.

Ad materiam vero quod attinet qualiumcunque stirpium, atque animantium, quæ Planetas exornant, etsi qualis sit cogitatione assequi nequeamus, illud tamen vix dubitari potest, quin ex elemento humido, uti nostra omnia, crescant &

 alan-

alantur. Nihil enim aliter gigni posse omnes fere Philosophi arbitrantur; & fuere inter præcipuos, qui ex aqua omnium rerum originem esse dicerent. Etenim, sicca & arida quæ sunt, motu carent: absque motu vero nihil corporibus, quo augeantur, accedere posse manifestum est. At liquidorum particulæ, & inter se continue moventur, & facile sese ubique insinuant; quo fit, ut non tantum seipsas, sed & alias diversæ naturæ, quas secum vehunt, crescentibus apponere aptæ sint. Ita enim, aquæ affluxu, & herbas adolescere, foliisque & fructibus augeri, & lapides ex arena concrescere cernimus. Itemque metalla & crystallos, gemmasque incrementa inde capere satis constat, etsi in his obscurius id animadvertitur, propter lentissimos progressus; quodque sæpe non in iis, quibus enatæ sint, locis cavitatibusque reperiantur; pervetustis, ut videtur, Terræ ruinis convulsionibusque disjectæ. Sed aquæ elementum a Planetis non abesse, verisimiles quoque conjecturæ suppetunt, ex telescopiorum observationibus. Apparent enim in Jove tractus quidam reliquo disco obscuriores, iique non eadem semper forma permanentes, quod nubium proprium est. Maculæ vero, quæ immutabiliter globo ejus inhærere conspiciuntur, sæpe longo tempore obtectæ manent, nubibus videlicet illis interceptæ, è quibus deinde rursus emergant. Atque etiam nubes in medio Jovis disco exoriri quandoque annotatum fuit, & maculas quasdam minores existere, reliquo corpore magis lucidas, neque eas diu superesse; quas Cassinus ex nivibus esse conjectabat, cacumina montium insidentibus. Mihi non improbabile videtur, terræ regiones candidiores esse, superfusis nubibus plerumque occultatas, ac nonnunquam ab iis liberas.

Aquas a Planetis non abesse.

Apparent, etiam in Marte, lucis & obscuritatis discrimina, ex quibus conversio ejus ad Solem, viginti quatuor horis cum 40 scrupulis primis, absolvi reperta est; nubes tamen nondum fuerunt animadversæ, idcirco quod multò minor cernitur quam Jupiter; etiam cum maximè ad Tellurem appropinquat. Præterquam quod & intensior Martis lux, utpote

a

a propiore Sole accepta, intuentibus impedimento est. Eademque lux magis etiam obstat in Venere. Sed si Tellus ac Jupiter nubes aquasque habent, vix dubitandum est quin & in cæteris inveniantur Planetis. Nec tamen nostræ prorsus similes esse aquas istas dixerim; etsi liquidæ ut sint, ad usus quos præstare debent, requiritur; ut verò perspicuæ, ad pulchritudinem. Nostra enim hæc, in Jove & Saturno, continuo gelu astringeretur, propter magnam Solis distantiam. Itaque putandum est naturam earum, quæ in Planetis sunt, ad suam quamque regionem attemperatam esse; ut in Jove quidem ac Saturno difficilius in glaciem vertantur, in Venere verò, ac Mercurio, minus facile in vapores abeant. In omnibus autem attractum a Sole humorem, subsidere rursus, & unde venit reverti, necesse est, ne penitus aridum Solum relinquatur. Non cadet autem nisi in guttas densatus; quod eveniet, sicuti apud nos, cum in frigidiorem locum ascenderit ex inferiore calidioreque ob terræ viciniam.

Nostra tamen non prorsus similes.

Habemus igitur in globis illis campos Solis radiis expositos, pluviisque aut rore irrigatos, in quibus si quid enascatur; ut fieri debere utilitatis & ornatus gratia diximus; id eodem quo apud nos modo fieri verisimile est: cum nec aliter fere, nec melius possit. Ut nempe radicibus suis solo adhæreat, simulque harum fibris humorem inde combibat. Neque vero satis ornatæ mihi esse terræ istæ videbuntur, nisi stirpes quasdam habeant alte excrescentes, quæque adeo arbores, aut arborum instar, fiant: quandoquidem hæ maximum, ac, præter aquas, unicum sunt ornamentum, quod Natura terris largiri possit. Quæ quantum amœnitatis & gratiæ afferant facile unusquisque secum existimat. Ut omittam jam materiæ ex arboribus oportunissimum ad omnia usum. Porro vix aliter quoque propagari stirpes, aut perennare posse existimo, quam producendis seminibus. Cum unica fere hæc ratio videatur, eademque tam mirabilis, ut non solius Telluris nostræ gratia inventa sit. Denique nihil vetat, ut, quemadmodum in diversis hujus terræ regionibus, ita in istis quoque longè remotis, idem in iis quæ ad stirpes attinent, Natura secuta sit. Ne-

Nec alia ratione illic nasci & propagari stirpes quam apud nos.

Idem & de animalibus verum esse.

Neque vero dispar ratio est in animalibus; cur non & pascendi, & generandi, modus similis putetur in Planetis ei qui est apud nos. Quia nempe universa terræ hujus animalia, sive quadrupedum generis, aut volucrum, aut natantia, aut reptilia, ipsaque insecta, idem naturæ præscriptum sequuntur. Vescuntur enim vel herbis, fructibusque, vel ipsis animantibus, quæ inde nutrita fuere: omniumque generatio per conjunctionem maris & fœminæ, perque fœcunditatem ovorum (nam & hæc ubique animadvertitur) peragitur. Nam hoc quidem certum est, fieri non posse ut, vel herbæ, vel animantia quæ illic sunt, sine propagatione generis sui esse perseverent; quia vel fortuitis casibus interire ea ac deficere contingeret; cum herbæ stirpesque humida materia constent, eoque etiam exarescere debeant; animalia mollibus flexilibusque membris, nec, ut silices, duris. Quod si in his alias nascendi vias comminiscamur, velut ex arboribus; quemadmodum diu creditum est, ex harum genere quodam in Britannia anates nasci, apparet quàm id à ratione abhorreat, propter summam, quæ lignum inter carnesque est, differentiam. Vel si animalia ex limo terræ existere putemus, velut de muribus in Ægypto multi prodiderunt, quis, naturæ paulo intelligentior, non videt hoc alienum esse institutis ejus? aut quis non existimet multò magis convenire Dei magnitudini ac sapientiæ, ut semel omnis generis animantia creaverit, inque Terrarum orbem certo modo, (quem nemo hominum adhuc divinare potuit) imposuerit, quam ut perpetuo novis ex terra producendis vacare necesse habeat? Quibus alendis, educandisque, abesset quoque prorsus parentum cura ac charitas, quam necessaria quadam ratione, omni animalium nostrorum generi, insitam, ingenitamque novimus. Sed hæc quæ ad propagationem attinent, etsi fortasse aliter sese habeant, hoc tamen rationibus superius adductis satis probatum est, & stirpes & animalia in Planetarum terris inveniri, ne scilicet sint hac nostra viliores. Quod cum ita sit, tum quoque, ne minus, quam nostra Tellus, istæ aliæ ornatæ sint, necesse est, ut non minor sit,

in

in utroque genere illo, quàm apud nos varietas. Quæram vero hæc esse potest? Equidem cum, in omni animantium nostrorum genere, cogito quibus modis moveantur; omnia video eo reduci, ut vel pedibus ingrediantur binis, quaternisve; insecta senis, vel etiam centenis; vel ut in aëre volent, alarum mirabili vi & moderamine; vel sine pedibus reptent; vel flexu corporum vehementi, aut etiam pedum percussu, in aqua sibi viam aperiant. Præter hos incedendi modos, vix videtur alius dari, aut omnino mente concipi posse. Ergo quæ in Planetis extant animantia, uno aliquo ex his utentur; aut quædam pluribus etiam, quemadmodum apud nos aves amphibiæ; quæ & pedibus incedunt, & natant in aquis, & in aëre volitant: & crocodili & hippopotami, inter terrestria, & aquatica, medii generis. Nulla autem præter hasce vita cogitari posse videtur. Quid enim esse possit, in quo animantia existant, præter tellurem solidam, aut Elementum liquidum, quale aquæ nostræ, aut multo liquidius, quale aër; aut illis similia. Posset enim esse aër multò, quàm apud nos densior, graviorque; eoque ad volandum accommodatior, neque tamen minus perspicuus. Possent etiam liquidorum plura genera, alia aliis superinducta esse. Velut si, super mare, incumbere cogitetur alia quæpiam materia, quæ decuplo levior sit aqua, centuplo gravior aëre; ac sua quidem superficie extrinsecus terminata, sed ut extra eam, terræ partes solidæ emineant. Sed non est, cur plura hujusmodi in cæteris Planetis, quàm in nostro, inveniri putemus, & si inveniantur, non tamen aliis modis ibi animalia moveri poterunt. Cæterùm quod ad varias eorum formas attinet; cum videamus in variis terræ regionibus miram adeo ac multiplicem diversitatem; invenirique in America quæ frustra alibi quæras; magna ratio est ut nullam earum formarum, quæ in Planetis exstant, imaginando assequi nos posse credamus. Quanquam si omnes istos movendi modos cogitemus, quos hic recensui, nihil mirum esset non magis differre aliquod istorum animalium à nostra-

te quopiam, quam nostra discrepant inter se. Ea dico quibus minimum est similitudinis.

Quam varia porro sint genera eorum in Planetis ita optimè colligemus, si ad ea quæ apud nos sunt, miramque in iis formarum diversitatem, animum advertamus. Planè enim verisimile est, non minori numero occursuras, si quis ad Jovis, aut Veneris globum cominus spectandum admitteretur. Percurramus verò (nam de omnibus dicere longum esset) majores nostrorum animalium differentias, vel formâ, vel proprietate aliqua singulari notabiles; idque in terrestribus, aquatilibus, volucribus. Cogitemus quæ sit inter equum, elephantum, leonem, cervum, camelum, porcum, simiam, histricum, testudinem, chamæleontem, dissimilitudo; quanta in aquaticis, cetum inter & phocam, raiam, lucium, anguillam, sepiam, polypum, crocodilum, piscem volantem, torpedinem, cancrum, ostream, muricem. In avium genere quantum discrimen, aquilæ, struthiocameli, pavonis, cygni, noctuæ, vespertilionis. Reptilia pro uno tantum genere censeamus. At in insectis formicas spectemus, araneos, muscas, papiliones; & miram horum naturam, quod ex vermibus volatilia evadant. In omnibus vero his, scimus quàm magnus præterea sit numerus minus dissidentium.

Summam animalium apud nos varietatem esse.

At quantuscunque sit, nihilo minorem esse in unoquoque reliquorum Planetarum putandum est. Quamvis vero de figura istorum animalium frustra per conjecturas quæratur, tamen de vita eorum generatim jam aliquid assecuti videmur; & de sensibus erit in sequentibus quod dicamus.

Nec minorem in Planetis.

Sicuti verò animantium, ita stirpium quoque & arborum nostrarum præcipuæ differentiæ expendi possunt. Velut quæ in abiete, quercu, palma, vite, ficu; tum ea quæ nuces, Cocos dictas, generat arbore; itemque alia apud Indos, è cujus ramis radices novæ pullulant, inque terram demittuntur. Item, in herbis, gramen, papaver, brassica, hedera, pepones, ficus Indica foliis crassis, sine caule, succrescentibus,

Item in stirpibus locum habere.

bus, aloë. In quibus rursus ea quam scimus, minus dissimilium est copia. Ad hæc propagandi viæ variæ inspiciantur; velut ex seminibus, nucleis, taleis, insitione, bulbis. Quibus omnibus nihilo pauciora, aut minus miranda, in Planetarum terris reperiri, existimandum sit.

In Planetis esse animantia, quæ ratione utantur.

Sed quod in hac disquisitione præcipuum est, plurimamque jucunditatem habet, nondum attigisse mihi videor; quamdiu nullos in terris illis spectatores posui, qui tot rebus creatis fruantur, pulchritudinemque, & varietatem earum, admirentur. Et video quidem, neminem fere eorum, quibus vel leviter hæc meditari contigit, dubitasse quin spectatores aliqui in Planetis collocandi sint: non quidem homines nobis similes, sed animantia tamen ratione utentia. Nempe iis visum est, qualemcunque terrarum istarum ornatum, velut frustra, nulloque fine aut consilio, fore procreatum, si non hoc propositum fuisset, ut ab aliquo cerneretur, qui intelligere ejus elegantiam posset, fructumque simul percipere, & summi opificis admirari sapientiam. Ego vero non hoc præcipuum argumentum habeo, cur animal rationis particeps Planetas incolere existimem. Quid si enim dicamus ipsum Deum spectare quæ effecit; (alia quidem ratione quam nos, sed videre eum quis dubitet qui oculos fabricatus est;) iisque delectari, neque præterea quidquam requiri. Nonne enim ob hoc ipsum & homines condidit, & quicquid continet mundus universus? Itaque quod præcipue me movet, ut rationabile animal in Planetis non deesse credam, hoc est, quod nimia Terræ nostræ præ cæteris illis esset præstantia ac nobilitas, si sola animal haberet tam longe cæteris omnibus animalibus, nedum stirpibus præcellens; in quo inest divinum quiddam; quo cognoscit, intelligit, res innumeras memoria complectitur, veri expendendi judicandique capax est, cujus denique gratia quicquid terra progenerat paratum esse videtur. Omnia enim in usus suos vertit. Lignis, lapidibus, metallis, domos exstruit; Avibus, piscibus, pecore & herbis vescitur; Aquæ & ventorum commodis ad navigandum utitur; ex florum odore pulchrisque coloribus

voluptatem percipit. Si nullum in Planetis est ejusmodi animal, quid esse queat, quod tanti æstimandum sit, quove is defectus pensetur? Pone in Jove majorem multo animantium varietatem; plures arbores, herbas, metalla: nihil erit in omnibus his, ob quæ tantum dignitatis accedat isti mundo, ac nostro propter humani ingenii mirabilem naturam. Hic si me judicium fallit, fateor me pretia rerum æstimare nescire.

Non obstare hominum vitia quo minus decorem terræ concilient.

Nec dicat aliquis, tantum malorum ac vitiorum eidem humano generi inesse, ut merito dubitari possit, an, tale quoddpiam animal Planetariis mundis tribuendo, dignitas iis ornamentumque, an his contraria accessura sint. Primum namque non impediunt vitia, majori hominum parti insita, quin ii qui virtutem, ac rectum rationis usum sectantur, tanquam pulcherrimum quid præstantissimumque censendi sint. Præterea credibile est, ipsa illa animi vitia, magnæ hominum parti, non sine summo consilio data esse. Cum enim Dei voluntate ac providentia talis sit Tellus, ejusque incolæ, quales cernimus; absurdum enim foret existimare omnia hæc alia facta esse, quam ille voluerit, sciveritque futura; putandum est utique non frustra multiplicem adeo animorum diversitatem mortalibus esse insitam; sed malorum cum bonis misturam, quæque inde eveniunt infortunia, bella, calamitates, eo fine accedere, ut necessitate urgente stimulosque admovente, ingenia excitentur, exerceanturque, dum quærimus ea quibus ab hostibus nos tutemur, quibusve machinis telisque eos persequamur: Utque paupertatem ac miseriam depellere conantes, varias artes exquiramus, naturamque scrutemur, ex cujus cognitione deinde auctoris potentiam prudentiamque admirari necesse sit; quas forsan alias pari stupore ac bestiæ præteriissemus. Nec enim dubitandum est, si in continua pace, omniumque rerum affluentia homines ætatem agerent, fieri posse ut admodum diu, non aliter fere quam bruta animalia, victuri sint; omnis scientiæ expertes, pluriumque commodorum ignari, quibus melius jucundiusque vita transigitur. Careremus mirifica illa scriben-

bendi arte, nisi summa in commerciis bellisque necessitas eam extudisset. Huic artem navigandi, huic serendi debemus, maximamque partem cæterorum quibus fruimur inventorum; itemque naturæ arcana fere omnia, inter experiendum reperta. Ita ea ipsa propter quæ incultanda rationis facultas videbatur, possunt dici ad perficiendam exacuendamque eam plurimum prodesse. Nam & virtutes ipsæ, fortitudo animi, & constantia, vix aliter quam in periculis rebusque adversis apparere possunt.

Quod si igitur genus animalium rationabile in cæteris Planetis esse cogitemus, quod virtutibus vitiisque fere iisdem atque homines præditum sit, id tanti esse existimandum est, ut absque iis, longè quàm Tellus hæc nostra viliores futuri sint.

Nec rationem in Planetarum incolis à nostra diversam esse.

Positis vero ejusmodi Planetarum incolis ratione utentibus, quæri adhuc potest, anne idem illic, atque apud nos, sit hoc quod rationem vocamus. Quod quidem ita esse omnino dicendum videtur, neque aliter fieri posse; sive usum rationis in his consideremus quæ ad mores & æquitatem pertinent, sive in iis quæ spectant ad principia & fundamenta scientiarum. Etenim ratio apud nos est, quæ sensum justitiæ, honesti, laudis, clementiæ, gratitudinis ingenerat, mala ac bona in universum discernere docet: quæque ad hæc animum disciplinæ, multorumque inventorum capacem reddit. Exstaretne alibi diversa ab hac ratio? censereturque injustum aut scelestum in Jove aut Marte, quod apud nos justum ac præclarum habetur? Certè nec veri simile est, nec omnino possibile. Cum enim rationis, qualem hic agnoscimus, ductu opus sit ad tuendam vitam ac societatem (nam & hanc apud Planeticolas reperiri ostendemus) si contraria ejus decretis statuantur, sequetur ruina ac subversio eorum, quibus ejusmodi mens perversa contigisset. At conservatio, ut videmus, rerum conditori ubique proposita est. Verum utut affectiones animi à nobis aliquatenus diversæ sint apud istos longinquarum terrarum habitatores, puta in his quæ ad amicitiam, iram, odium, honestatem, verecun-

diam, decorem attinent; non tamen dubitari poteſt, quin in veri inveſtigandi ſtudio, judicandis rationum conſequentiis, ac præſertim in ratiociniis, quæ ad quantitatem ac magnitudinem ſpectant, circa quæ Geometria verſatur, (ſi quid habent ejuſmodi, quod mox inquiremus) non, inquam, dubitari poteſt, quin prorſus ſimilis ſit, eademque via ingrediatur illorum ac noſtra ratio; quodque apud nos verum eſt, idem ſit in cæteris Planetis. Etſi vis ac facultas in his rebus major minorve illorum incolis fortaſſe quam nobis contigerit.

Sed jam nimis longè provectum me eſſe ſentio. Ante enim diſpiciendum erat de ſenſibus corporeis iſtorum in Planetis agentium, quibus ſi carerent, vix jam aut vitam, ut animalia, ſortiti eſſe videri poſſint, aut habere, in quo rationis uſum exerceant. Puto autem oſtendi poſſe probabilibus argumentis & bruta animantia, & quibus ratio ineſt, convenire, in his quæ ad ſenſus attinent, cum iis quæ terram hanc incolunt. *Nec deeſſe illis ſenſus.* Primùm namque ſi cogitemus quid ſit in animalibus videndi poteſtas, abſque qua neque paſcendi ratio eſſet, nec pericula vitandi; nec denique vita alia quam talparum aut lumbricorum; prorſus neceſſe eſſe intelligemus ut, ubi ſunt animalia his præſtantiora, ibi & viſu prædita ſint. Cum nihil ad vitam vel conſervandam, vel exornandam æque conducat. Quod ſi vero inſpiciamus mirabilem lucis naturam, ſtupendumque artificium, quo ad eam fruendam oculi comparati ſunt, facile cognoſcemus, perceptionem *Nec viſum.* rerum procul diſtantium, cum circumſcriptione formarum, diſcrimen intervallorum, non alio modo, quam qui ex viſu ſit, inſtitui poſſe. Non enim poteſt hic ſenſus, imo nec alius quiſquam eorum quos novimus, exiſtere, quam ex motu extrinſecus adveniente. Qui motus, ut alibi explicuimus, in efficiendo viſu, à Sole proficiſcitur, aut ſtellis inerrantibus, aut igne; quorum particulæ celerrima agitatione concitæ, circumfuſam cæleſtem materiam continue pulſant, impelluntque; qui impulſus a proximis ad longe diſſitas citiſſime propagetur, fere eo modo quo ſonus per aërem. Abſque hoc motu, materiaque ætheris

ris qui intermedia cæli ſpatia complet, nec Solem nec ſtellas cernere poſſemus; neque etiam alia quæ propiora ſunt corpora; cum ab his ad nos idem ille motus repercuſſus pervenire debeat. Hic, oculorum ſenſu perceptus, lux appellatur. Inque eo ſenſu mirabile eſt ante omnia, quo pacto ad tantam ſubtilitatem perduci potuerit, ut minimâ cæleſtis materiæ commotiunculâ afficeretur, ſimulque qua ex parte illa oriretur perciperet. Tum quomodo nihil ſeſe mutuo impediant innumeri ejuſmodi pulſuum proceſſus, ſphæricæque ſuperficies, aliæ alias trajicientes. Hæc omnia tam mira ac ſubtili ratione conſtituta ſunt, ut nec minimam eorum partem hominum ingenia excogitare potuiſſent, cum vix etiam quomodo ſeſe habeant comprehendere queant. Quid enim tam mirabile, quam particulam corporis quandam ita fabricatam eſſe, ut ejus opera animal ſentiat procul poſitorum corporum figuram, poſitum, motum quemlibet, diſtantiam; idque etiam cum colorum varietate, quo diſtinctius ea dignoſceret. Oculi vero præter hæc artificioſiſſima conſtructio, quæ perfectam rerum extra poſitarum picturam in cava choroidis ſuperficie imprimere apta eſt, omnem profecto admirationem ſuperat, neque eſt in quo manifeſtius Geometriæ artem Deus exercuerit. Atque hæc non tantum ſolertia ſumma inventa & fabricata ſunt, ſed & videntur eſſe ejuſmodi, ſi quis propius attendat, ut non alia ratione perfici potuerint quàm hac quam cernimus. Nam neque lux aliter, quàm communicato motu per materiam cæleſtem, res longo intervallo remotas ſenſibus noſtris offerre poterat; nec oculorum artificio ullum aliud par dari ad diſtinctè referendas rerum imagines. Ut valde eos falli arbitrer, ſiqui hæc eadem multis modis ordinari potuiſſe contendere audeant. Quare omnino credibile eſt utrumque iſtud eodem modo ſe habere in Planetarum regionibus atque hic; neque aliam eſſe iis, quæ illic habitant animantibus, videndi rationem. Habebunt igitur oculos; atque etiam binos minimum, quò poſſint rerum ante pedes poſitarum diſtantias percipere, ſine quo vix tutò ingredi licet. Et hæc quidem ad vitæ uſum neceſ-

cessariò tribuenda sunt animantibus Planetarum universis fere. Quæ vero ratione & mente prædita sunt, cum alias quoque ex visu utilitates capere possint, tantò magis consentaneum est ut tam præclaro munere donata sint. Nos enim colorum pulchritudinem, formarum elegantiam, ac concinnitatem visu percipimus; legimus, scribimus, cælum & astra contemplamur, eorumque cursus, magnitudinesque metimur; quæ quatenus ad Planetarum incolas quoque pertineant, paulo post videbimus. Nunc illud prius quæramus an cæteros quoque sensus nostros iis contigisse verisimile sit. Ac de auditu quidem multa suadent, ut cunctis, quæ illic sunt, animalibus eum inesse credamus. Prodest enim plurimum ad vitam à periculis tutandam; cum sonitu ac fragore sæpe imminens infortunium cognoscatur; præsertim noctu atque in tenebris, cum oculorum auxilium ereptum est. Videmus præterea ut animalia pleraque vocis sono sui similia advocent, multaque inter se significent, nobis quidem parum intellecta, sed plura fortasse quam putamus. Apud ea vero quæ ratione utuntur, si cogitemus quam mirabilis sit vocis & auditus oportunitas, vix credibile videbitur tam utilem sensum, tantumque loquendi artificium, hujus Terræ nostræ, ac nostri tantum causa fuisse inventum. Quomodo enim illis non multum desit ad vitæ commoda, & felicitatem nostræ similem, qui tanto beneficio carent: aut quanam alia re pensari hoc possit? Quod si porro consideremus, quam pulchre, quamque industrie natura hoc effecerit, ut idem ille aër, cujus respiratione vivimus, cujus flatu navigamus, qui, ut volare queant, avibus præstat; ut, inquam, idem ille ad exprimendum proferendumque sonum comparatus sit; sonus verò ad formandum, auribusque ingerendum sermonem; vix credemus insignem hunc aëris usum, in terris istis longinquis eam neglexisse? Esse enim illic aërem qui terris incumbat, vix dubitari potest, cum nubes in Jove apparere dixerimus. Sicut enim hæ ex aquæ guttulis minimis constant, ita ex particulis aquæ seorsim volitantibus magna ex parte formatur aër ille qui propius ter-

Non auditum,

Nec per quem sonus perferatur aërem,

ram

ram circundat. Quem Planetarum globis adesse etiam hoc suadet, quod respirandi ratio, qua vita sustentatur omnium quæ hic habemus animantium, videtur omnino ex universalioribus illis naturæ institutis esse, velut nutriri ex fructibus terræ.

De sensibus autem reliquis animalium ut dicere pergam, cum sanè qui ex tactu oritur, necessitate summa datum esse apparet omnibus iis quæ molli flexilique pelle teguntur, quò à lædentibus caveant refugiantque; cum absque eo vulnera, plagas, contusionesque crebras acceptura fuerint. In quo tam provida natura fuit, ut, ne minimam quidem pellis particulam, doloris sensu vacare voluerit. Itaque hanc facultatem, tam necessariam ad conservandam animalium incolumitatem, omnino credibile est etiam planetas inhabitantibus inditam esse. *Nec tactum,*

Odoratum vero ac gustum quis non videt necessaria esse pascentibus, quo conducibilia a noxiis, nihilve profuturis dignoscant. Itaque si herbis, seminibus, aut fortasse carnibus quoque in regionibus istis animalia alantur; etiam his sensibus, tam ad cavendum, appetendumque necessariis, credibile est ea non destitui. *Nec odoratum, nec gustum.*

Scio à nonnullis fuisse quæsitum, an non alii præter eos quinque quos diximus, naturâ dari potuerint. Quod quidem si concedatur, forsan dubitandum sit animalium planetariorum sensus longè alios esse ac nostratium. Nec sanè obstare quidquam videtur quo minus alii extare possint percipiendi modi: attamen cum perpendimus ad quos vitæ usus unusquisque eorum, quos habemus, comparati sint; non videtur saltem alius quisquam necessarius adjungi potuisse. Nempe effecit providentia ut & propinqua, & longius remota, qualia essent oculis sentiremus. Rursus ut non visa, sive a tergo, sive in tenebris, auditus exciperet. Item ut quæ nec oculi nec aures adesse nunciarent, alius tamen sensus qui in naribus est præsentiret, idque in canibus mirabili ut scimus subtilitate. Postremo effecit ut quæ quatuor istos sensus effugerent, quò minus in corpus impacta nocere pos- *Nec horum sensus longe alios esse ac nostratium.*

sint, tactu perciperentur. Ita omnibus modis saluti conservationique animalium consuluit, nec quidquam amplius addi aut desiderari posse videtur; ut proinde planetarum incolis vix aliud nisi superfluum largitura fuerit.

Cum autem ex singulis sensibus, præter utilitatem, voluptas aliqua ad homines perveniat; velut ex gustatu in cibis; ex odoratu in floribus & aromatis; ex visu in contemplanda pulchritudine formarum, & colorum; ex auditu harmonicorum sonorum; ex tactu in rebus venereis, (nisi peculiaris quidam sensus hic dicendus est) animalibus verò cæteris ex quibusdam horum; nonne dicemus hæc naturæ munera fere eodem modo reliquorum Planetarum incolis distributa esse. Certe id quidem ratio postulare videtur. Sive enim cogitemus, quanto in universum, propter hæc, jucundior feliciorque vita reddatur, non debemus maximum ejus bonum nostræ Telluris habitatoribus ascribere, cæteras tenentibus denegare, quasi res nostræ rebus illorum multò præferendæ sint. Sive ad voluptates, quæ in cibis capiendis, & in conjunctione utriusque sexus contingunt, attendamus; intelligemus hæc esse necessaria quædam veluti providæ naturæ jussa, tacitè cogentis ad conservandum, propagandumque animantium genus: vel etiam, in bestiis quidem, fortasse genus ipsum propagari, ut utraque illa jucunditate fruatur, ut proinde, utroque nomine, in cæteris Planetis eadem reperiri consentaneum sit. Equidem cum hæc omnia quanti sint, quantamque utilitatem habeant, considero; quamque admirabile sit, tale quid, quale est voluptas, in rerum natura existere; omnino adducor ut credam, non soli Telluri nostræ, quæ de minoribus planetis unus est, rem tantam obtigisse. Et hæc quidem de voluptatibus iis quæ sensus corporeos afficiunt, rationis facultatem aut nihil, aut leviter tantùm. Sunt autem homini, præter istas, aliæ quoque, quæ mente tantum, & rationis sensu percipiuntur; aliæ cum lætitia conjunctæ; aliæ seriæ; neque ideo minoris faciendæ, velut quæ ex oblectatione scientiarum, inventorum, verique cognitione oriuntur; de quibus omnibus, an ad alio-

Ut nec voluptatem ex iis ortam.

rum.

rum quoque planetarum incolas pertineant, in sequentibus dicendi locus erit.

Supersunt alia nunc expendenda quæ in terris illis similia esse rebus nostris verisimile sit. De Elementis terræ, aëris, & aquæ, vidimus jam quàm probabile sit ea in Planetis cæteris non deesse. Videamus & de igne, qui apud nos quidem non tam Elementum esse dicendus est, quam motus quidam concitatissimus particularum à certis corporibus abreptarum. Hoc verò, quidquid est, etiam Planetarum incolis datum esse, multa sunt quæ verisimiliter probent. Primum quòd non tam in Terra hac, quàm in Sole, ignis sedes collocata videatur; ac sicut, calore Solis, herbæ & animantia hic crescunt ac foventur, ita quoque haud dubie in cæteris fiat Planetis. Cum autem intensior calor ignem generet, credibile est illic quoque, ac præsertim in Soli propinquioribus, eosdem aut majoris caloris gradus existere, eorumque vi ignem. Deinde videmus quam multis modis excitetur, velut colligendis Solis radiis, repercussu pelvium aut speculorum; ferri & silicis collisione; lignorum attritu mutuo; herbæ non bene siccæ congestis acervis; ex fulmine; ex montium terræque sulphureæ incendiis. Quare mirum esset, non aliquo ex istis omnibus, in Planetarum terris, eum accendi. Cogitemus deinde quanta apud nos sit ignis utilitas, quantaque necessitas. Hujus enim beneficio frigoris incommoda depellimus in iis regionibus, ubi calor Solis minus viget propter radiorum obliquitatem, atque ita efficimus ne magna Terrarum pars inculta inhabitataque maneat; quod in omnibus Planetarum globis, sive æstatis hyemisque vicissitudines sentiant, sive perpetuo fruantur æquinoctio, æque necessarium est remedium; quoniam & in his, loca polis viciniora, parum juvari Solis calore certum est. Eodem igne nocti lucem inducimus, diemque velut alterum creamus, quo non parum temporis vitæ adjicitur. Itaque ob hæc omnia prorsus verisimile est tanta re non solos Telluris incolas frui, sed omnibus Planetis communiter esse concessam.

Ignem quoque Planetis communem esse.

Porro quæri potest de animalibus, tam ratione utentibus quàm brutis; atque etiam de stirpibus arboribusque; an, quæ isthic nascuntur, nostris magnitudine respondeant. Nam si hæc ipsorum globorum mole natura metiatur, essent in Jove ac Saturno animalia quædam decies aut quindecies altiora Elephantis, aut tantundem longitudine balænas nostras superantia. Tum illa quæ ratione prædita sunt, gigantum corpora haberent nostris comparata. Qua quidem in re nihil video quod vel mirum sit, vel fieri nequeat. Nulla tamen ratione cogimur ut re ipsa id ita esse credamus; quandoquidem in multis rebus apparet non iis mensuræ regulis naturam se obstrinxisse quæ nostra opinione convenientiores videbantur. Veluti quod ipsorum globorum Planetariorum moles nequaquam pro distantia eorum a Sole constituta sit, cum Mars manifesto minor sit Venere, etsi remotior: cumque conversio Jovis, super axe suo, 10 horis peragatur; Telluris vero, tantò minoris, impendat horas 24. Posset vero dubitari, cum proportionem in his ita negligat Natura, an non fortasse pumiliones quidam sint incolæ Planetarum, aut ranis muribusve non majores. Sed ostendam postea cur id nequaquam consentaneum putandum sit.

Magnitudinem corporum in Planetis existentium ex Planetarum magnitudine non recte metiri.

Aliud quoque dubium exoriri posset, utrum genus unum tantum animalium quæ rationem sortita sint, an plura in Planetis singulis reperiantur, & num dispari rationis vi. Ac profecto tale quid in Terra hac nostra contigisse cernimus. Non de iis nunc dico quæ figuram hominum præferunt; (etsi de his quoque id non absurde dici possit) sed si quorundam è bestiarum genere, sensum intellectumque spectemus; veluti canum, simiarum, castorum, elephantorum; imo & avium quarundam, & apicularum, ea talia sunt, ut nequaquam solum genus hominum rationis particeps dicendum videatur. Apparet enim quoddam hujus instar in istis omnibus, quod, absque ulla institutione aut experientia, iis inesse deprehenditur.

In Planetis ut in Terra varia esse animalia quibus ratio competat.

Et inter ea Hominibus similia.

Attamen dubitari nequit quin longè præcellat hominum intelligentia & ingenium, quippe innumeris rebus aptum, con-

consilii ad futura capax, præteritorum memoria infinita præditum. Quod ingens præstantiæ discrimen si perpendamus, credemus non sine ratione, in cæteris quoque planetis, unum quoddam genus prætulisse naturam; atque eo magis, quod si plura forent eadem ingenii sagacitate, possent nocere sibi invicem, ac de possessionibus & imperio inter se contendere; quod nunc quoque faciunt nimis frequenter, licet unius generis sint, quæ in Terra hac dominantur. Verum hæc utcunque se habeant, de iis nunc agamus terrarum istarum animalibus, quæ maximè cæteris ratione antecellunt; quæramusque an sciri possit, quibus in rebus ejus usum impendant, & an habeant etiam artes scientiasque suas, velut nos in hoc nostro planeta. Quod quidem, inter ea quæ ad naturam eorum attinent, præcipuè expendi meretur. Sed, quo melius id fiat, paulò altius exordiendum est, vitaque & studia hominum attentius inspicienda.

Ac videtur quidem quatenus providendis procurandisque rebus tantum necessariis homines intenti sunt, ut nempe ab aëris injuriis tuti habitent; ut mœnibus inclusi ab inimicis sibi caveant, ut leges condant ad secure ac tranquille vivendum; ut liberos educent; victum illis, sibique parent; in his omnibus inquam nihil magnum admodum habere videtur rationis nostræ usus, cujus causa nos brutis animantibus anteferamus. Namque hæc pleraque istorum facilius simpliciusque efficiunt; aliquibus nihil opus habent. Quin imo & virtutis, justitiæque sensus, propter quem paulo ante excellere mentem humanam dicebamus, itemque amicitiæ, gratitudinis, honesti; quid aliud efficiunt, nisi ut vel vitiis hominum obsistatur, vel vita tranquilla & mutuarum injuriarum expers præstetur; quod bestiis sponte ac naturæ ductu contigit. Jam si curas multiplices, animi ægritudines, concupiscentiam, mortis metum, quæ omnia rationem illam nostram comitantur, ante oculos ponamus; eaque cum vita parabili, quieta & innocua bestiarum comparemus; videri possint harum plurimæ, ac præsertim ex avium genere, jucundius agere, & meliore quam homines sorte frui. Nam

quod ad voluptates corporis attinet, haud dubie iis æque ac nos afficiuntur, quicquid contradicant novi quidam philosophi; qui sensum omnem ita auferunt reliquis præter hominem animantibus, ut pro meris automatis aut neurospastis ea haberi velint; quorum absurdæ, crudelique sententiæ, miror quenquam accedere posse; præsertim cum & voce & verberibus fugiendis, & re omni contrarium bestiæ ipsæ significent. Imo vix dubito, quin miro pulchroque illo per aëra lapsu aves sese delectari sentiant; magis etiam sensuræ si intelligerent quantopere lentus ac humilis noster incessus ipsarum pernicitate, sublimique volatu superetur. Quid igitur est in quo potissimum eminet humanæ rationis usus, facitque ut antecellamus cæteris animantibus? Nihil æquè puto ac contemplatio naturæ, Deique operum, tum cultura scientiarum, quibus consequimur ut eorum præstantiam, magnitudinemque aliqua ex parte cognoscamus. Absque enim disciplinis quid esset contemplatio? quamque multum interest inter eos qui Solis pulchritudinem, utilitatemque, & cælum sideribus ornatum otiose intuentur, aliosque doctiores qui cursus istorum omnium scrutantur: quomodo affixæ, quæ dicuntur, stellæ à vagis differant, quæque causa sit diversarum anni tempestatum intelligunt: qui denique subtili ratiocinio magnitudinem Solis ac Planetarum, simulque distantiam eorum metiuntur; quantumque item inter eos qui animalium varios motus agilitatemque mirantur, & hos qui fabricam omnium membrorum, artificiosissimamque compagem, architecturamque in iis speculantur? Quod si igitur Planetæ reliqui dignitate non cedunt Telluri nostræ, ut in superioribus principii fundamentique loco posuimus; oportet ibi animalia existere, quæ non solum naturæ opera spectent & admirentur, sed quorum ratio in examinandis, intelligendisque iis occupetur, nec minora quam nos consecuta sit. Itaque non tantum sidera intuentur, sed & Astronomiæ scientiam excolunt; neque aliud obstat quo minus hoc verisimile credamus, quam superba illa nostrarum rerum æstimatio, quæ difficulter sane deponitur. Scio tamen futuros,

Humanam rationem præ illa brutorum præcipue eminere in contemplatione naturæ.

Etiam Planetarum incolas scientias excolere, & inter eas, Astronomiam.

ros, qui dicant nimis audacter nos ista Planetarum incolis tribuere: multorum quippe verisimilium accumulatione huc esse perventum; quorum si unum quodpiam contra se habeat, quam positum sit, cadat, velut in vitiosa ædificatione, omne quod superstruximus. Sed scire eos velim, hoc quod de Astronomiæ studio diximus, omissis fere omnibus hactenus adductis confirmari potuisse, atque inde initium fieri. Postquam enim positum fuit Terram hanc inter Planetas esse habendam, neque iis dignitate aut ornatu præferendam; quis dicere audeat in ea sola reperiri, qui spectaculo Naturæ, quod unum pulcherrimum ac magnificentissimum est, fruantur? aut inter eos quibus hoc contigit, nos unos esse quibus cæli arcana penitius perfectiusque perspecta sint? Ecce igitur & hac breviore via comprobata in Planetis Astronomiæ cognitio, ex qua & animal rationis compos, & pleraque alia quæ præcessere, illis inesse consequebatur. Adeo ut, ad priora confirmanda, hæc quoque novissima argumentatio conducat. Quò vero magis probabile fiat, saltem in superioribus Planetis, Jove ac Saturno, Astronomiæ notitiam non deesse, considerandum est, quod si homines ad sidera observanda impulit, ut credi par est, admiratio & pavor in defectibus Solis & Lunæ; multo magis, in utroque hoc Planeta, ea ratio valere debuit, propter cotidianas fere Lunarum, crebrasque Solis, quæ illic contingunt, eclipses. Ut si quis æquè ignorare ponatur quid rerum in Planetis omnibus geratur, multo verisimilius dicturus sit Astronomiam in majoribus illis duobus, quàm in hoc nostro, vigere.

Posita autem apud Planeticolas hujus scientiæ cognitione & usu, quam multa hinc præterea consequuntur quæ de vita statuque eorum reliquo, præter jam dicta, novas conjecturas afferant?

Primùm enim nulla observatio siderum, ad motus eorum investigandos, absque organis institui potest; sive ea è metallo, sive è ligno aliave solida materia fabricata sint. Quod ut fiat, nec fabrorum instrumento, ferra, ascia, dolabra, mal- *Et quæ iis inserviunt artes mechanicas.*

malleo, lima, carere possunt; neque hæc habere absque usu ferri aut æque duri cujuspiam metalli. Sed & circuli arcus in partes æquales divisi, aut lineæ rectæ in inæquales, in istis organis requiruntur. Atque hic jam Geometriæ & numerorum ratio arcessenda est. Sed ante omnia quoque necesse est ut observationum memoria ad posteros transmittatur; ut tempora & Epochæ annotentur; quæ sine scripto non videntur explicari posse. Oportet igitur ut & suam scribendi artem habeant, multum fortasse dissimilem nostræ, qua fere omnes populi utuntur, sed quæ vix ingeniosior, aut ad discendum facilior esse queat. Quis enim non videt longe eam præferendam esse Sinarum innumeris characteribus, multoque magis funiculorum nodis, aut pictis imaginibus, quæ apud barbaros Mexicanos Peruvianosque in usu erant. Omnium quidem Regionum homines aliquam scribendi, aut quoquo modo annotandi, artem quæsivisse videmus: quò minus mirum sit, si & Planetarum incolæ, necessitate coacti, eam repererint, ac deinde ad Astronomiæ aliarumque disciplinarum studia adhibuerint. Necessitas vero scripturæ in rebus Astronomicis etiam ea re cognoscitur, quod cum hypothesibus variis, siderum motus, quasi divinandi sint; eæque hypotheses priores in sequentibus corrigendæ, prout observatis & Geometriæ ratiociniis vitia earum coarguuntur; nihil horum posteris tradi potest, nisi literis consignatum, figurisque expositum.

Ut & Geometriam, Arithmeticam,

Et scribendi artem.

Postquam vero omnia hæc jam iis concesserimus, longe etiamnum præstantior perfectiorque apud nos erit siderum scientia; vel propter agnitam systematis universi verissimam formam, vel propter usum telescopiorum, quibus Planetarum corpora, magnitudinesque & varias formas intuemur; superficiei lunaris montes, montiumque umbras; stellarum ingentem multitudinem, aliaque plura non alias videnda, percipimus. Ut fere necesse sit, nisi rursus nobis tanquam hac parte felicioribus blandiri volumus, etiam illam cognitionis rerum cælestium consummationem Planeticolis tribuere; itemque videndi aciem, quæ vel nostram longe exuperet,

Opticam.

ret, vel lentium vitrearum, aut speculorum adminiculo sicut nostra, adjuvetur. Quod tamen dicere vereor, ne quis, ex hoc uno audacius asserto, cætera omnia æstimanda putet, ac risu digna clamitet.

At non sine ratione, ut videtur, objiciet quispiam, Planetarios nostros fortasse omni subtiliore scientia destitui, quemadmodum Americanæ gentes, priusquam ad illas Europei penetrassent. Quas si respicimus, itemque in Africa, Asiaque permultas æque barbaras, videbitur hoc tantum summo opifici propositum fuisse, ut vita fruantur homines, naturæque bonis & voluptatibus contenti sint, grato animo omnium datorem colentes; scientiarum vero inquisitionem præter naturam paucos aliquos affectasse. Talia vero dicentibus non deest quod responderi possit. Prævidit enim certe Deus hominum ingenia eo esse processura, ut res cælestes scrutarentur; ut artes vitæ utiles reperirent; maria quoque navigarent, metalla effoderent. Possetne enim horum quidquam præter mentem infinitæ illius intelligentiæ contingere? Quod si prævidit, etiam hominum generi ea destinata sunt, nec poterunt artium & doctrinarum studia, quasi præter naturam essent, existimari, quæ in ipsa natura indaganda occupantur. Præsertim cum tanta illa cupiditas amorque sciendi non possint censeri frustra hominum animis infixa esse. Instabunt vero rursus dicentque, de siderali scientia potissimum, si ad hanc quoque homines nati sunt, cur tam pauci ad eam attendunt? Primum enim ex quatuor Orbis partibus, sola fere est Europa, in qua Astronomiæ studia excolantur. Nam Astrologiam divinatricem futurorum, quæ non scientia, sed miserum quoddam ac sæpe noxium delirium est, ne nominandam quidem hic arbitror. At in Europæ Nationibus non unus è centum millibus hæc studia amplectitur aut addiscere curat. Tum ad tempus quod attinet, multa sæcula effluxisse dicent, antequam aut Astronomiæ, aut Geometriæ, sine qua illa disci non potest, ulla rudimenta innotescerent. Sciri enim quo tempore in Ægypto & Græcia primum exortæ fuerint. Ac recte quoque adjicient non adhuc octoginta annos præteriisse,

Has scientias homini præter naturam non esse.

ſe, ex quo verus ac ſimplex Planetarum motus, rejectis Epicyclorum figmentis, repertus ſit; atque ita demum Aſtronomia cum naturæ cognitione conjuncta. Hiſce ut occurratur, addam ad ſuperius reſponſum, quod à divina providentia petebatur, dubitari non poſſe, quin ea conditione homines nati ſint, ut multo temporis decurſu paulatim artes diſciplinaſque eruant; nullam enim harum iis ingenitam eſſe, aut ſubito à Deo infuſam, & has de quibus nunc agimus, omnium eſſe difficillimas remotiſſimaſque: ut magis mirum ſit unquam incipere eas potuiſſe, quam tam tarde fuiſſe inſpectas. Pauci fateor ſingulis ætatibus has curant, aut ad ſe pertinere exiſtimant: ſed ſi multorum ſæculorum tempora cogitentur, non exiguus fiet illorum Numerus; quos, quemadmodum ſibi videntur, reliquis beatiores eſſe quis negaverit? Denique paucorum induſtria in his rebus exerceri ſatis erat, cum inventorum utilitas ad nationes totas gentesque longe porrigatur. Cum igitur hujus Terræ incolis, etſi paucis tantum, ad ea percipienda ingenium & aptitudo contigerit; nihiloque putandi ſint cæterorum planetarum habitatoribus præſtantiores feliciorefve; manet profecto, quam inveneramus, veriſimilitudo, ut etiam apud illos reperiantur qui cognitione Aſtronomiæ non careant. Nunc ad alia pergamus quæ inde conſequi, neceſſe eſt.

Oſtendimus quomodo unà cum hac ſcientia, non ſolum Geometria & Arithmetice, ſed & Mechanicæ artes, inſtrumentaque incolis Planetarum concedenda ſint. Hic verò jam ſponte obvenit ut quæramus, quo pacto inſtrumentis illis, Machiniſque, & ad ſidera obſervanda organis uti poſſint, aut quomodo literas ducere; quæ omnia nos manuum opera exequimur. Itaque neceſſario & manus habebunt, vel aliud quodpiam, quod vicem earum fungi poſſit, membrum. In quibus hominum generi tantum eſſe præſidii exiſtimabat è veteribus Philoſophis quidam, ut in iis cauſam reponeret omnis eorum ſapientiæ. Qui, ut puto, hoc ſenſit, abſque manuum opera homines ad cultum animi, rerumque cognitionem non fuiſſe perventuros. Et vere quidem

Planeticolas manus habere,

dem ille. Finge enim pro manibus datas fuisse ungulas, ut equis & bobus; nunquam nec oppida nec domos, licet ratione instructi, ædificassent. Nihil de quo loquerentur habuissent, nisi de iis quæ ad pabulum, aut ad conjugium, aut sui tutelam attinent. Omni scientia, omnique rerum memoria caruissent: Denique à bestiis parum absuissent. Quodnam porro instrumentum æque accommodatum ac manus esse possit ad innumera illa ad quæ nobis usui sunt, obeunda? Elephanti proboscide mirabiliter utuntur, qua & amplecti quidvis & projicere, minutioraque quævis è solo tollere norunt: unde & manus eorum pars illa dicta est, cum reipsa sit in longum productus nasus. Rostro quoque aves pleræque nidos exstruunt, alimentaque congerunt. Sed harum nihil est quod non manuum oportunitati longè concedat. Et est sane, tum illarum quam brachiorum, mirabilis quædam machinatio; ut protendi, reduci, inque omnem partem moveri possint. Tum mirâ industriâ instituti digitorum ac pollicis articuli, ut nervorum attractu quælibet prehendant, firmiterque contineant. Ut omittam sensum illum, in extremis digitis, exquisitissimæ subtilitatis; quo vel in tenebris pleraque corpora internoscimus. Patet itaque aut manus brachiaque, aut aliud quid eorum loco, quod vix æque aptum excogitari potest, Planetarum populis datum esse, ne non solum nobis, sed & simiarum & sciurorum generi, plus indulsisse hac in re natura existimetur.

Et pedes; De pedibus vero minus etiam dubitabitur, si repetamus ea quæ supra disseruimus de vario animalium incessu, qui non videtur aliis modis, quam quos ibi recensuimus, cogitari posse. Inter eos vero non est, qui tam bene Planeticolis ratione præditis conveniat, quam quo & nos utamur. Nisi forte & volandi facultatem in aliquibus Globorum istorum acceperunt. Quod minus probabile tamen propter vitam in societate degendam, de qua postea dicemus.

Erectos oculos, vultumque, Non caret autem verisimilitudine, erectos oculos, vultumque ad sidera contemplanda iis contigisse, quandoquidem hoc in hominum corpore providentiâ divinâ sic institu-

tum videtur, & a Philosophis merito celebrari solet. De reliquorum vero membrorum positu, si sapientiam artificis laude dignam censemus, quod oculos in supremâ corporis parte collocaverit; sordidiora vero membra procul inde, atque a conspectu quodammodo removerit; nonne putandum est eadem fere observasse illum in formandis istorum procul habitantium corporibus? Nec enim propterea dicimus figuram nostræ similem iis tribuisse. Est enim infinita quædam animo concipienda formarum possibilium varietas, qua & singulæ quæque partes istorum corporum à nostris differre queant, & totorum exterior interiorque œconomia. Cernimus quam aptè & commodè animalium nostrorum quædam lana aut pilis vestiantur; alia elegantius etiam plumis pennisque. Quidni isti in Planetis, quos rationis participes diximus, aliqua simili ratione tecti sint? propter quod meliori quidem conditione bestiæ, quam homines, apud nos esse videntur. Nisi hoc eo fine sic constitutum fuit, ut ipsa nuditas necessitatem hominibus imponeret quærendi ac fabricandi varia operimentorum genera, atque hinc etiam ingenii exercendi materia existeret. Et apparet sane, ex hac necessitate, non minimam commerciorum, artificiorumque mechanicorum occasionem nasci. Sed & propterea forsan nudos homines natura produxit, ut pro arbitrio suo tenuius densiusve amicti incedere possint; atque ita ad quasvis terrarum oras inhabitandas sese componere. Alia vero major hac, quam diximus, differentia intelligi posset inter corpora Planetariorum ac nostra; cum animalia quædam ita à natura formata reperiantur, ut veluti ossa extrinsecus habeant, carnes introrsum, atque ossibus inclusas, qualia sunt cancri, astacique, & fere etiam testudines. Attamen hanc membrorum compagem, & in paucis vilioribus tantum illa secuta est, & Planetarum incolis, quo minus eam tribuam, facit, quod subtili varioque digitorum usu cariturí essent, quo tam valde eos opus habere ostensum fuit: nam absurda specie non multum alioqui moverer.

Nec tamen hinc sequi eorum formam nostræ plane similem.

Etenim omnino cavendum est ab errore vulgi, cum animum

[illegible] minus [illegible]

mum rationis capacem non alio in corpore, quam nostris simili habitare posse sibi persuadet. Ex quo factum est, ut populi penè omnes, atque etiam Philosophi quidam, humanam formam diis adscripserint; Imo ut, à simili persuasione, cuidam Christianorum sectæ nomen inditum fuerit. Hoc vero non nisi ab hominum imbecillitate & præjudicata opinione proficisci quis non videt? uti illud quoque, quod eximia quædam pulchritudo humani corporis esse putatur: cum tamen ab opinione & assuetudine id totum quoque pendeat, affectuque eo, quem cunctis animalibus natura provida ingeneravit, ut sui similibus maxime caperentur. Illa verò tantum possunt, ut non sine horrore aliquo animal homini multum dissimile conspectum iri credam, in quo rationis & sermonis usus reperiretur. Nam si tale solummodo fingamus aut pingamus, quod, cætera homini simile, collum quadruplo longius habeat, vel oculos rotundos duploque amplius distantes; continuo eæ figuræ nascuntur, quas non possimus intuentes non aversari, quamvis ratio deformitatis nulla reddi queat.

tionis capax etiam alia forma inhabitet, nihil impedire.

Dixi in superioribus cum de magnitudine agerem incolarum qui in Planetis sunt, verisimile videri non esse eos valde exiguos nobiscum comparatos. Suadet enim hoc primò, quod probabile sit, sicut corpora hominum se habent ad Telluris magnitudinem, ut peragrare universam possint, atque ita formam molemque ejus cognoscere; eodem modo & in cæteris Planetis incolisque eorum rationalibus ordinatum esse; nisi hac in re, quæ sane magna est, nos ipsis rursus præferre velimus. Deinde cum siderum scientiam & observationes apud eos exerceri ostenderimus, sequitur ut & corpora nacti sint lignis metallisve tractandis, inque instrumenta machinasque adaptandis, idonea. Quæ & eo præstabiliora sunt quo ampliora. Ac sane si homunciones quosdam, muribus non majores, cogitemus, non possent ii siderum animadversiones, quales requiruntur, instituere; nec instrumenta ad eas parare, aut disponere. Itaque omnino vel æquales nobis ponendos esse

Planeticolas nobis vel æquales vel majores esse.

existimo, vel majores, ac præsertim in Jove, Saturnoque, quorum Globi tanto Tellurem nostram superant.

Eos in societate vivere. Porrò quia, ut diximus, astronomiæ studium sine annotatione observatorum non potest procedere, ars vero scribendi non nisi in societate ratione utentium, & cogentibus vitæ necessitatibus, inveniri potuit; neque magis ars fabrorum aut fusoria; sequitur ex eo (quod supra dicebam) & societates coli apud Planetarum indigenas, ac mutuas operas eos inter se præstare; adeoque hac parte similitudinem magnam ibi esse nostratium rerum. Quamobrem & certas stabilesque sedes potius quam ambulatoriam vitam iis convenire dicendum est. Quid igitur? an & cætera sociali vitæ propria habebunt? leges, Magistratus, tecta, urbes, mercaturas aut rerum permutationes? Certe equidem apud barbaros Americæ & insularum populos, cum primum ad eos perventum est, eadem hæc fere jam in usu erant. At non propterea negaverim aliter ista in Planetis cæteris se habere posse quam apud nos; cum ex iis quædam sint quæ abesse queant à societate animalium ratione præditorum; eoque tantum excogitata, ne ratione male utamur & cum aliorum injuria, itaque societas solvatur. Possunt enim in aliis istis globis in ea rerum abundantia versari, ut nihil alieni appetant, rapiantve. Possunt ea esse æquitate, ut pacem perpetuo colant, nec sibi invicem insidientur, aut mortem inferant; imò ut neque oderint nec irascantur; quod si esset, multo quàm nos feliciores putandi sint. Sed verisimilius est, ut quemadmodum apud nos, sic ibi quoque bonis mala, sapientiæ stultitia, paci bellum misceatur, nec desit egestas artium magistra. Quia & ex his utilitatem aliquam proficisci antea ostendimus; &, si nulla esset, tamen nec præferendi res illorum rebus nostris causam habemus.

Colloquiorum jucunditate frui. Quod autem nunc dicam, audacius, scio, videbitur; nec tamen probabilitate caret. Nempe, si in societate (quod jam penè obtinuimus) vivant gentes Planetarum; etiam, præter commoda inde provenientia, voluptate aliqua tali eas affici, quali nos, ex congressibus colloquiisque amicorum, amo-

amoribus, jocis, spectaculis. Hoc, inquam, probabile est, quia si nihil horum Planeticolis concedamus, sed semper eos seriò, ac sine omni hilaritate, aut animi remissione agere putemus; ingens vitæ condimentum, quoque vix illa carere possit, iis adempturi simus, atque ita nostram hanc beatiorem facturi; contra quam ratio postulat.

De reliquis vero occupationibus & studiis illorum ut porrò inquiramus; videndum est quænam istorum, præter ea quæ jam diximus, cum nostris aliquam similitudinem habere probabile sit. Domos sibi eos construere, ideo vel maxime credere libet, quòd & pluvias in terris illis cadere ostendimus. Sequebatur enim hoc ex eo, quod in Jovis Planeta nubium quidam mutabiles tractus cernuntur; vapores, aquamque haud dubie continentes: quam aliunde quoque illic non deesse argumentis adstruebamus. Erunt ergo & imbres & venti, quia attractum à Sole humorem recidere in terram necesse est; & calore soluti vapores ventorum causa sunt; quorum flatus ex illa nubium Jovialium mutabili facie cognoscitur. Adversus hoc ergo, ut noctes tuto & quiete transigant (habent enim & noctes & somnum proinde, uti nos) munire se eos, casasque ac tuguria ædificare, aut specus effodere, verisimile est. Atque eo magis quod omne genus animalium, apud nos, exceptis piscibus, ad sui tutelam hæc molitur. Cur vero casas & tuguria, & non domos amplas & magnificas Planetarum habitatoribus extrui credamus, nisi quod non possumus res nostras non præ omnibus pulchras perfectasque putare. Qui autem nos? Nempe in globulo illo vitam agentes, qui non decies millesimam partem globorum Saturni aut Jovis æquet, si corporum moles inter se conferantur. Nulla equidem ratio adferri potest cur non Architecturæ elegantiam, symmetriamque, æque cognitam habeant in istis cæterisque Planetis, ac nos in nostro: nec cur non palatia, turres, pyramidesque alicubi nostris multo altiores sumptuosioresque, nec minori concinnitate exædificent. Cumque multiplex sit hominum in his rebus industria, ut in cædendis lapidibus, coquenda calce & lateri-

Domos adversus pluviam extruere.

ribus; cum ferro, plumbo, vitro utantur, atque ad ornatum auro quoque; his omnibus nihilo inferiora illic haberi verisimile est.

Si vero divisa est illis, sicuti nobis, Globi sui superficies, ut pars terram, pars maria contineat; uti ex supra memoratis Jovis observationibus colligi potest, quia nubes vix aliter quam ex maris amplis tractibus enascerentur; permagna ratio est ut & navigare eos putemus. Cum alioqui etiam rem tantam, tamque utilem, nostræ Telluris Globo soli non absque arrogantia ascripturi simus. Præsertim verò in Jovis Saturnique maribus commoda esset navigatio propter Lunarum plurium utrobique copiam; quarum ductu longitudinum mensuram, quam vocant, quæ nobis non contigit, facile consequi possint. Quod si navium usum habent, quam multa præterea habebunt quæ ad eas pertinent; Vela, anchoras, funes, trochleas, gubernacula; & horum usum peculiarem quemadmodum nos; ut vento penè contrario navigetur, in contrarias vero partes eodem vento facillime. Nec fortasse nauticæ pyxidis invento carebunt; siquidem motus materiæ magneticæ, quæ terræ globum continue pervadit, est ejusmodi quid, ut cæteris quoque planetis convenire censeri possit. Mechanicæ quidem scientia, & Astronomiæ, in re navali necessario requiritur, atque adeo utriusque harum magistra Geometria, de qua jam ante aliquid attigimus.

Navigare, adeoque & artes, quæ eo faciunt excolere.

Existimo autem, etiamsi nec ad istas artes nec ad alias quasdam respiciamus, in quibus vel necessitas vel occasio Geometriæ inveniendæ initium fecerit, non deesse rationes, quibus verisimile fiat ejus notitiam Planetarum incolis obtigisse. Sive enim cognitionis ipsius pretium ac dignitas spectetur, in qua singularis quidam intelligentiæ est usus, ac certa indubitataque veri comprehensio, quanta in nullis rebus disciplinisve aliis reperitur: sive quod est ejusmodi natura sua, ac talia ejus axiomata & effata, ut quocunque loco & tempore, aut quibuscunque in mundis exter, prorsus eadem ubique esse debeat; videtur omnino non solis Telluris nostræ incolis res talis parata aut oblata esse. Quid quod figuras Geo-

Ut & Geometriam.

Geometricas, velut circulos, triangula, polygona, ſphæras, multis modis natura ipſa oculis objicit, ad variaſque eorum proprietates indagandas quaſi invitat; in quarum contemplatione, etiam extra utilitatem omnem, ſumma eſt oblectatio. Quis enim non admiratur, cum diſcit ea quæ de circulo in Elementis Euclideis, & Apollonii locis Planis docentur? aut quæ de ſphæræ ſuperficie & quadratura Parabolæ Archimedes prodidit, aut recentiorum ſubtiliſſima inventa? Quorum omnium eadem, & ad diſcendum æque expoſita, eſt veritas in Saturno, ac Jove, atque apud nos, & ex iiſdem ſimpliciſſimis principiis pendens, quo facilius credi poteſt pulcherrimi jucundiſſimique ſtudii in illis ac cæteris planetis aliquos participes eſſe: Etſi præcipue hoc ſuadet utilitas quæ ex eo in omnem vitam emanat. Quod ſi jam eo uſque rei Geometricæ peritos qui in Planetis ſunt dicerem, ut & Tabulas Sinuum, & Logarithmos, & calculum Analyticum invenerint; abſona ac pene ridicula proferre viderer. Nec tamen quidquam obſtat quin horum aliquid reperiſſe potuerint, aut aliquando reperturi ſint; atque etiam his noſtris fortaſſe majora. Non debemus enim, ut jam ſæpe diximus, præferre nos ipſos ac res noſtras rebus Planeticolarum.

Cæterum illud quod uniuſmodi & æternum in Geometrica ſcientia ineſſe animadvertimus, ſimiliter quoque in Harmonicis inveniri certum eſt; cum conſonantiæ omnes conſtanti menſura ac proportione conſtituantur; omnis vero phtongorum ordo, omniſque cantus delectatio, etiam vocis ſingulæ, in conſonantiis fundata ſit. Quo fit ut *Muſicam;* apud omnes gentes eadem tonorum intervalla canantur, ſive per gradus continuos, ſive ſaltu vox progrediatur. Imo animal quoddam in terris Americæ reperiri fide digni auctores narrant, quod ſex muſicos tonos deinceps voce exprimat: Ut appareat ipſam naturam immutabili ratione eos præſcribere. Quandoquidem igitur quæ huc ſpectant, certa quoque & unica, & neceſſaria ratione ſeſe habent, veriſimile eſt, non minus quam Geometriæ,

etiam Musicæ oblectationem ad plures quam ad nos pertinere. Positis enim aliis terris atque animalibus ratione & auditu pollentibus, cur tantum his nostris contigisset ea voluptas, quæ sola ex sono percipi potest? Nescio equidem quantum apud alios valiturum sit argumentum, quod hic ab unitate, & immutabili natura istarum artium petiimus; mihi non leve aut contemnendum videtur, nec multum ei cedere, quo in superioribus usus sum, cum videndi facultatem Planetariis animalibus convenire docui.

Porro si tonis harmonicis & cantu delectentur, vix quoque fieri potest quin & instrumenta quædam musica repererint; quoniam & casu in hujusmodi inventa incidere contingit: velut chordis valide contentis, aëris sono, cannarum aut cicutarum sibilo. A quibus initiis, sicuti ad testudines, citharas, tibias, & organa polyplectra nos pervenimus, ita illi quoque non minus elegantia excogitare potuerint. Sed quemadmodum certi definitique licet sint toni, cantusque intervalla, tamen apud diversos populos alium atque alium esse canendi morem ac normam videmus, ut olim apud Dores, Phrygas, Lydos; nostra ætate apud Gallos, Italos, Persas: ita fieri potest ut ab omnibus his longius abeat Planetariorum Harmonice, quamvis illorum auribus gratissima. Cur vero nostra rudiorem opinemur nulla ratio est; neque etiam cur non & chromaticis sonis, & quibusdam Enarmoniis utantur? cum hemitonia quoque natura suppeditet, certisque proportionibus definiat. Imo ne minus assecuti sint hisce in rebus quam nos, etiam plurium vocum aut chordarum concentus, artificiosaque permistio, & dissonantium tonorum, & tritoni, & diapente diminutæ usus iis fortasse concedendus sit. Scio vix aliquam verisimilitudinem apud multos hæc habitura, ac minorem etiam, si æque doctos dicamus in Jove aut Venere incolentes, ac sunt ii qui in Gallia, Italiave plurimum hac arte excellunt. Et tamen fieri potest ut vel illis peritiores sint, ac præcipue in parte Theoretica hujus artis ea perspexerint, quæ apud nostrates hosce parum hactenus intelle-

Quæ tamen à nostra diversa esse possit.

cta

cta sunt. Si enim ex nostris Musicis quæras, cur consonantia diapente post aliam similem vitiose ponatur, dicent alii nimiam dulcedinem devitari, quæ ex gratissimæ consonantiæ iteratione nascatur: alii varietatem in harmonicis sequendam esse. Hæc enim præcipui artis auctores, cumque iis Cartesius, adferunt. At Jovis aut Veneris incola forsan veriorem hanc causam demonstrabit, quod à Diapentè ad aliam deinceps pergendo, tale quid fiat, ac si remisse toni statum immutemus; cum Diapente, unà cum interjecto ditoni sono, (qui si desit, mente suppletur) toni speciem certo constituat: hujusmodi vero subita commutatio auribus merito injucunda inconditaque judicetur; cum etiam in universum ea plerumque durior accidat, (præterquam in transitu) quæ fit à tribus sonis consonis, ad trium aliorum harmoniam, nullo priorum manente. Sciet etiam ille idem fortasse, quod nemo adhuc animadvertit nostrorum hominum, cur in nullo vocis unius, plurium ve cantu, tonus servari possit in eadem altitudine ac tenore, nisi consonantia intervalla pleraque ultro, ac nemine advertente, ita temperentur, ut à perfectione summa nonnihil descifcant. Et cur optimum sit hoc temperamentum in chordarum systemate, cum ex Diapente quarta pars commatis ubique deciditur. Quod idem absque sensibili discrimine effici ex divisione Diapason in partes æquales 31, indeque Cyclum quendam Harmonicum in se redeuntem existere, non ita pridem ostendimus. Quod tamen Planetarum incolæ si perspexerunt, etiam Logarithmorum numeri iis noti esse debebunt.

Cur consonantia diapente post aliam similem vitiose ponatur?

At de Tono vocis temperando quod dixi, probationem habet non difficilem; quam hic adjungimus, quandoquidem jam aliquid præter somnia nostra venditare cœpimus. Ajo itaque, si quis canat deinceps sonos, quos Musici notant Literis C, F, D, G, C, per intervalla consona, omnino perfecta, alternis voce ascendens descendensque; jam posteriorem hunc sonum C, toto Commate, quod vocant, inferiorem fore C priore, unde cani cœpit.

Demonstratio temperamenti in tono vocis adhibendi.

pit. Quia nempe ex rationibus intervallorum istorum perfectis, quæ sunt 4 ad 3, 5 ad 6, 4 ad 3, 2 ad 3, componitur ratio 160 ad 162, hoc est 80 ad 81, quæ est Commatis. Ut proinde, si novies idem hic cantus repetatur, jam propemodum tono majore, cujus ratio 8 ad 9, descendisse vocem, tonoque excidisse oporteat. Hoc verò nequaquam patitur aurium sensus, sed toni ab initio sumpti meminit, eodemque revertitur. Itaque cogimur, occulto quodam temperamento uti, intervallaque ista canere imperfecta; ex quo multo minor oritur offensio. Atque hujusmodi moderatione fere ubique cantus indiget; uti colligendis rationibus, quemadmodum hic fecimus, facile cognoscitur. Et hæc quidem in gratiam artis illius studiosorum nec Geometriæ rudium exponere placuit. Nunc eo unde discessimus revertimur.

Diximus de artibus inventisque quibusdam quæ nobiscum communia habere Planeticolas verisimile sit; præter quæ etiam alia exstare illic necesse est, sive ad usus & commoda vitæ facientia sive ad delectationem. Hæc vero quam multa sint, quantique facienda, ita optime rationem inibimus, si plurima illa, quæ apud nos reperiuntur, recensere & ob oculos ponere libuerit.

Exposui supra animantium fruticumque apud nos genera quæ plurimum inter se figuris differrent: præter quæ, minus dissimilium, ingens copia reperiatur: dixique nihilo pauciora utriusque generis, ut longe diversa, in Planetarum terris exstare putandum. Nunc etiam illud videamus, quæ utilitas quæve commoda, tum ex animalibus, tum ex herbis arboribusque ad nos perveniant, ac prorsus verisimile existimemus non minora ex iis, quæ illic terrarum inveniuntur, ad incolas ipsarum redundare.

Recensentur commoda quæ ad nos perveniunt ex animalibus, herbis, arboribus.

Hic vero operæpretium est ut quæ sint divitiæ nostræ inspiciamus, quæ multæ magnæque sunt. Nam, præterquam quod alimenta nobis arborum fructus herbæque suppeditent; illæ pomis, nucibus; hæ seminibus, foliis, radicibus; quodque plurimorum ex his in medicina usus est; pe-

petitur ex arboribus materia qua domos navesque fabricamus. Et lino vestes paramus, excogitatis nendi & texendi artificiis. Ex cannabe, spartove, fila ac funiculos torquemus; ex filis vela ac retia conficimus, ex funiculis rudentes & funes anchorarios. Florum porro odoribus coloribusque oblectamur; & quamvis sint etiam qui nares offendant, & noxiæ quædam herbæ inveniantur, tamen in iis sæpe boni quid delitescit; vel fortasse hoc egit natura ut comparatione mali bona magis eminerent: quod multis in rebus secuta videtur. Quanta vero ex animalibus est utilitas? Oves lanam ad vestitum præbent, vaccæ lac; utræque carnes ad vescendum. Asinis, camelis, equis, ad portandas sarcinas utimur. His etiam ut nos vel inscensi vehant, vel curribus juncti pertrahant. Ubi egregium illud rotarum inventum occurrit, quod libenter Planetarum quoque habitatoribus adscriberem, cum jam in societate eos vivere & domos ædificare pene evicerim. Utrum vero etiam animalibus pro cibo utantur, an Pythagoræ simile dogma sequantur, non habeo quod affirmem. Apparet quidem hoc homini datum esse, ut omnibus iis alatur quæ vel in terra vel in aquis nascuntur, si quid nutrimenti contineant; ut herbis, pomis, lacte, ovis, melle, piscibus, volucrum quadrupedumque plurimorum carnibus. In quo mirum sane videri potest, animal illud rationis compos ita esse comparatum, ut cum multorum aliorum pernicie cædeque vivat. Nec tamen naturæ præscripto contrarium hoc esse putandum est, cum placuisse ei videamus ut leones, lupi, aliaque rapacia, pecudes & infirmiora quælibet pabuli loco habeant: aquilæ columbas leporesque prædentur: Piscium permulti pisciculos se minores devorent. Quin & canum varia genera ad venandum nobis largita est, ut quæ pedibus nostris persequi nequiremus, illorum celeritate ac sagacitate consequeremur. Præter omnem vero istam ex viventibus herbisque utilitatem, hanc quoque delectationem ex iis nos capere voluit rerum conditor, ut varias eorum formas na-

turasque & generandi vias contemplaremur; in quibus infinita quædam varietas ac mirabilia multa insunt, quæ apud naturæ scriptores celebrantur. Imo in ipsis insectis quis non miratur apium cellulas hexagonas, aranearum telas; tum bombycum involucra, ex quibus incredibili industria delicatissimam vestem conficimus, eaque copiâ ut naves totæ ea onerentur. Atque hæc quidem de herbarum animantiumque genere, quatenus homini prosunt, summatim retulisse sufficiat.

Ex Metallis, Cogitetur jam porro quanta sit ejus solertia in reperiendis, effodiendis, explorandis metallis; itemque in fundendis, repurgandis, miscendis. Quanta in tenuandis auri laminis, aut hydrargyro resolvendis, ut parvo impendio, quæcunque voluerimus, auri splendorem coloremque induant. Quam mira ac multiplex sit ferri utilitas; quam quæ ignorarunt nationes, eæ omnium ferè mechanicarum artium rudes vixerunt, proque armis, tantum arcus, clavas, sudesque habuerunt. Nos vero & pulverem ex sulphure & nitro mistum habemus, variosque ejus usus, qui an plus juvet an noceat merito dubitari potest. Videbatur enim mira ejus vi, simulque artificiosa muniendorum oppidorum arte, certius præsidium inventum esse, quam priscis temporibus fuerit, adversus hostiles impetus: sed & horum ex eo simul violentiam crevisse videmus, & fortitudini viribusque in præliis multo minus nunc locum esse quam tunc fuerit. Quod enim olim Imperator Græcus dixisse fertur, *Periisse Virtutem* cum Catapultarum, ac Balistarum inventa exorirentur, idem nunc majori jure queri possumus; ac maxime Bombis, quos vocant, repertis; quos non mœnibus, nec situ oppida arcesve repellere possunt, sed quamvis validæ disjiciuntur, ac solo æquantur. Ut, vel ob hoc unum, melius homines ejus pulveris invento carituros fuisse dicendum sit. Nec tamen propterea prætereundum fuit in commemorandis nostræ Telluris repertis, cum verisimile sit, etiam in cæteris Planetis, noxia artificia quædam cum bonis emersisse.

Au-

Auspicatior est aquæ & aëris apud nos usus: quo & navigandi ratio constat, & vires comparantur, quibus, nullo labore nostro, molas machinasque versemus. At hæ quam multiplices, quamque ad varias res adhibentur? Nam & frumenta iis comminuimus, & olea exprimimus, & ligna secamus, & pannos tundendo densamus; & chartis materiam conterimus; quarum aliàs quoque pulcherrimum est inventum, cum ex vilissimis linteorum scrutis, tam pulchra foliorum candidissimorum copia paretur. His addatur jam præclarum illud typographiæ inventum, cujus opera artes omnes reliquæ, non servantur tantum, sed & comparantur multo quam ante facilius. Item sculpendi pingendique peritia, a parvis rudibusque initiis eo progressa, ut nihil elegantius ab hominum ingenio profectum esse videatur. Ponatur & vitri excoquendi scientia, atque in tot formas ducendi facilitas. Tum speculorum vitreorum politura, hydrargyrique super ea inductio. Ac præcipue quoque vitri usus mirabilis, in pervidenda rerum natura, post telescopii microscopiique inventa. Recenseantur etiam horologiorum automatôn fabricæ; aliorum tam exilium, ut gestanti nihil incommodent; aliorum tam exquisita æqualitate tempus metientium, ut nihil supra optari possit, quibus utrisque inventa nostra plurimum profuere. *Ex aqua, & aëre, variisque artificiis,*

Multa addere possem de multiplici doctrina & rerum naturæ cognitione quam præter Geometriæ Astronomiæque scientias consecuti sumus, atque ea pleraque nostra ætate: velut de gravitate aëris ac vi qua compressus resilit. De singularibus Chymicorum experimentis; è quibus liquores inflammabiles, nuperque ultro lucentes, ac levi tractatione ardentes, prodierunt. De sanguinis circuitu per arterias venasque, qui antea intelligebatur, nuper vero & oculis usurpari cœpit, adhibito microscopio, in piscium quorundam caudis extremis. Item de generatione animalium, quod inventum est nulla nisi ex similium semine nasci; idque de herbis quoque verum esse. Quodque in semine marium reperiuntur animalculorum myriades vivacissimorum, quæ ipsam ani- *Ex iis, quæ nostra ætate inventa sunt.*

animantium sobolem esse verisimillimum sit: res mirabilis, atque ab omni ævo incognita.

Illa omnia verisimiliter non extare in Planetis, sed aliis æque dignis rependi.

Jam vero postquam hæc omnia accumulavimus Telluris incolarum inventa, putemus fieri quidem posse, ut quædam eorum etiam apud Planetarios extent; credibile tamen esse maximam partem eorum illis ignorari. At iis quæ non habent rependendis æque multa, pulchraque & utilia, admiratione digna iis tributa esse oportet. Quanquam igitur ibi terrarum aliquos ratione præditos, & Geometras, & Musicos reperiri probabilibus argumentis ostenderimus, & in societate communitateque viventes, & manibus pedibusque instructos, tectisque & mœnibus munitos: non tamen dubitandum est, quin & formæ, & rerum quas agunt novitate, mirabile supra quam dici possit futurum sit spectaculum, si quis Mercurius, aut potens Genius eò nos deducat. Sed cum ejus itineris conficiendi spes omnis adempta sit, id unum tamen, quod possumus investigare non pigebit; qualis nempe cælestium rerum facies sese offerat, in unoquoque istorum globorum vitam agentibus, cum ad eam hoc quoque pertineat. Simul vero & de præstantia cujusque, tum ob magnitudinem, tum ob adjunctum comitum lunarum numerum, quædam scitu digna referemus, ac stellarum denique inerrantium incredibilem distantiam nova ratione indagabimus. Sed à longa attentaque meditatione requiescemus hic paulum, finemque huic Libro imponemus.

CHRI-

CHRISTIANI HUGENII
COSMOTHEOROS,

SIVE

De Terris Cœlestibus, earumque ornatu, Conjecturæ.

AD

CONSTANTINUM HUGENIUM,

Fratrem.

LIBER II.

Cum ante annos complures Librum Athanasii Kircheri, qui *Iter Ecstaticum* inscribitur, evolverem; in quo de Natura Siderum, rebusque in Planetarum superficie extantibus, differitur; mirabar nihil illic adferri eorum quæ mihi jam ab illo tempore circa hæc, tanquam valde probabilia, occurrebant: sed longè alia tradi, inania pleraque, & à ratione aliena. Quod magis etiam intellexi, cum conscriptis superioribus idem opus denuo percurrerem. Jamque visum est aliquid esse conjecturas nostras, ac ponderis nonnihil iis accedere, si cum Kircherianis conferantur. Quod ut judicari possit, utque appareat quàm de his rebus frustra philosophari conentur, qui fundamenta unica verisimilitudinis, quibus usi sumus, rejiciunt; non abs re erit de opere illo quædam annotasse.

Is igitur Vir optimus, Genio quodam duce, per cæli spa- *Kircheri iter extaticum examinatur.*

ſpatia, ſtellaſque ſe circumferri fingens, partim ea quæ ex Aſtronomorum ſcriptis hauſerat, partim quæ ipſe de Planetarum terris meditatus erat, ac vulgo probari poſſe putabat, quaſi viſa enarrat. Antequam verò iter longinquum ingrediatur, hæc duo tanquam certo tenenda ſtatuit ſancitque; nullum videlicet Telluri motum eſſe tribuendum; tum nihil in Planetarum globis Deum extare voluiſſe, quod vita aut ſenſu præditum ſit, adeoque nec herbas quidem. Itaque, relicto Copernici ſyſtemate, Tychonicum ſibi quod ſequatur deligit. Sed cum ſtellas inerrantes pro totidem Solibus habeat, iiſque ſingulis ſuos Planetas circumponat; hoc ipſo (quod an ſenſerit neſcio) infinita numero jam exoriuntur ei Copernicea ſyſtemata. Quæ quidem perabſurdè, præter ſibi proprios motus, univerſa circum Tellurem noſtram, viginti quatuor horis, immani celeritate converti facit. Cumque horum maximam partem fateatur extra hominum conſpectum eſſe remotam, in hoc quoque incidit incommodum, ut fruſtra tot Soles lucere dicendi ſint, fruſtraque calorem ſuum impertiri tot globis Telluri ſimilibus, elementaque eadem, (ita enim vult) & cætera omnia habentibus, præter ſtirpes & animalia. Atque hinc porro ad alia magis abſona delabitur. Nam quia ne Planetarum quidem, qui noſtro ſyſtemate continentur, alium ullum reperit uſum, ad diu exploſas Aſtrologorum ineptias ſe convertit; & hoc fine tot tantaſque corporum moles conditas eſſe vult, ut influxu eorum vario, certiſque legibus temperato, mundi univerſitas conſervetur, incolumiſque perduret: utque præterea in hominum animos iidem influxus vires ſuas exerceant. Itaque, in Aſtrologicæ artis gratiam, in Veneris Planeta jucundam pulchramque rerum faciem ſibi oblatam narrat; cum luce blanda, undis dulciter fluctuantibus, odoribus ſuaviſſimis, atque undique fulgentibus cryſtallis. In Jove auras ſalubres, ac ſuaveolentes, aquas limpidiſſimas, terras argentei ſplendoris. Quò nimirum, ab influxu hujus utriuſque ſideris, fauſta ac ſalutaria omnia in Terram hominesque deriventur; ut vel pulchros & amabiles, vel ad prudentiam & gravitatem

tem propenſos reddat. In Mercurio neſcio quid ſerenum vividumque, unde ingenium ac ſolertia naſcentibus inſinuetur. At in Marte omnia tetra, exitialia, fætida, piceas flammas, fumoſque ſe vidiſſe memorat. In Saturno triſtia, horrenda, ſquallida, caliginoſa; ut ex his Planetis, (neſcio quare Apoteleſmaticis omnibus inviſis) influxus maligni infeſtique mundo ac mortalibus eveniant; niſi tamen benigniorum illorum radiis corrigi ac mitigari eos contingat. Hæc nempe & his ſimilia Genio illi cæleſti comes adhærens diſcit. Quem & ſerio reſpondere facit cum interrogatur, anne aquis, quæ in Veneris Planeta fluunt, Hebræus aut Paganus quiſpiam, eo delatus, ritè baptizari queat. Eodem quoque docente Magiſtro, intelligit cælum ſtelliferum non eſſe ex materia ſolida conflatum, ſed liquidum prorſus, in quo ſtellæ Soleſve innumeri longè latéque ſpargantur; nuſquam alligati, (& hactenus rectè) quique omnes diei ſpatio vaſtiſſimos, ut dixi, circuitus peragant. Quo in motu, ſi talis foret, non advertit quanta vi illi undique diffugituri ſint, ob motum circularem tam immenſæ celeritatis. Sed ne ſic avolent, inque ſpatia infinita recedant, Intelligentiæ motrices, credo, impedient. Etenim unicuique ſtellæ fixæ, imo & Planetæ, Intelligentias aut Angelos ſuos adjungit, qui impellant eos, curſumque moderentur. In quo Doctorum quorundam turbam ſequitur, qui vaniſſimum Ariſtotelis commentum inconſideratè, invitaque ratione, adoptarunt. Iſtos verò beatos Genios labore tanto Copernicus liberat, ſolius Terræ inducto motu; cujus ſanè neceſſitatem, vel ex hoc uno, omnes vident, niſi qui ultrò, ac volentes, cæcutiunt. Equidem cogitavi nonnunquam, meliora à Kirchero exſpectari potuiſſe, ſi, quæ ſentiebat, liberè exponere auſus fuiſſet. Sed cum hoc non auderet, neſcio cur non in totum illo argumento abſtinere maluerit. Sed hunc celeberrimum ſcriptorem jam omittamus: &, quandoquidem nil veriti ſumus, conjecturis noſtris, ſpectatores in Planetis ponere, adeamus nunc, uti propoſitum fuerat,

 ſin-

singulos; & quinam sint anni eorum, qui dies, quæ denique Astronomia, deinceps consideremus.

Apparens qualis sit constitutio Solis & Planetarum in Mercurio.

Itaque, ut ab intimo, & Soli viciniore incipiam, scimus Mercurium triplo propius circiter quam Tellurem nostram ad ingens illud sidus accedere. Cui consequens est ut triplo quoque majus id conspiciant ejus incolæ, ratione diametri, lumen vero & calorem ejus sentiant noncuplo quam nos majorem. Nobis proinde intolerabilem, quique accensurus sit siccatas herbas, fœnum stramenque, qualia apud nos crescunt. At nihil impedit ita comparata esse, quæ ibi vivunt animantia, ut optatam temperiem in ardore illo experiantur. Herbas vero esse ea natura, ut multo magis vim caloris perferant. Nec mirum esset istos Mercurii indigenas putare non ferendo frigore nos urgeri, luceque frui exigua, qui tanto longius a Sole absimus. Sicut nos de Saturni colonis facile nobis persuademus. Non deest verò dubitandi ratio, cum à calore vita pendeat, isque corpori mentique vigorem alacritatemque præstet; an non, propter Solis viciniam, Hermopolitæ illi nobis ingenio præstare putandi sint? Sed quo minus huic causæ tribuam facit, quod calidissimas terræ nostræ regiones sortitos, Africæ, Brasiliæque populos, nec sapientia nec industria æquare videmus temperatiorum tractuum incolas; ut vel ex eo perspicitur, quod in omnium scientiarum ac fere artium ignoratione versentur: cum nec nauticæ rei, qui circum littora incolunt, nisi perexiguam notitiam habeant. Nollem quoque Jovicolis, Saturnicolisque hebetes, plumbeasque mentes, intelligentiamve tribuere nostra minorem, propterea quod tanto longius a Sole remoti vivunt; cum uterque globus iste tam præstanti sit magnitudine, tantoque comitatu stipatus feratur. Qualis porro sit Mercurialibus Astronomia, utque cæteros Planetas certis temporibus Soli oppositos spectent, ex figura systematis, priore libro exposita, perfacile est intelligere. Atque his oppositionum temporibus Venerem ac Tellurem præcipuo splendore illic effulgere necesse est. Nam cum adeo

deo lucida nobis Venus appareat, quo tempore tenuem nascentis Lunæ faciem refert; oportet eam sextuplo aut amplius clariorem cerni, cum Soli opponitur, ex Mercurii Globo pleno orbe spectatam, & minore quoque intervallo distantem: atque ita tunc non parum dispellere nocturnas tenebras gentibus istis, Lunæ auxilio carentibus. Quænam sint denique apud eos dierum spatia, & an varias anni tempestates experiantur, incompertum est hactenus, quod ignoretur an axem diurnæ conversionis ad orbem, quo circa Solem defertur, obliquum habeat, & quanto tempore conversio ea peragatur. Neque enim dubitari debet de diebus noctibusque eorum cum in Tellure, Marte, Jove ac Saturno hæc vicissitudo certò cognoscatur. Anni vero spatium vix quartam partem nostri æquare illic constat..

Qualis in Venere. In Veneris globo positis, eadem fere in cælo apparere necesse est quæ de Mercurio diximus, nisi quod hunc nunquam videt Soli oppositum, cum non nisi 38 circiter gradibus ab eo recedat. Sol vero illis major apparet quam nobis, diametro sescupla, orbe plus quam duplo; quo & bis tantum caloris lucisque præbere cum oportet. Itaque propius ad nostræ temperiem Tellus ista accedit. At annus mensibus nostris septem cum dimidio fere finitur. Noctu verò globus hic noster, in locis Soli oppositis, multo lucidior Veneri apparere debet quàm unquam nobis appareat Venus; ac tunc Lunam quoque, perpetuum comitem nostrum, facile conspiciunt, si modo oculos habent nostris non imbecilliores. Sæpe autem in Venere miratus sum, cum tubis longioribus, pedum 45, aut 60, eam inspicerem Terræ propinquam; Lunæque semiplenæ similem, aut jam in cornua curvari incipienti; prorsus æquabili splendore superficiem ejus perfundi: ut vix dicere audeam, aliquid maculæ simile, in ea me animadvertisse; cujusmodi in Jove & Marte manifestè notantur, licet orbe multo minore sese offerentibus. Si enim maria ac terras habet Veneris globus, obscuriores nobis maris tractus conspici deberent; terrarum vero clariores; sicuti ex præaltis rupibus inspectum desuper ma-

re, non perinde, ac adjacentes terræ, lucidum apparet. Credebam nimium Veneris fulgorem in causa esse, quo minus diversitas lucis animadverti posset. Sed cum fumo infecissem vitrum oculo proximum, ad auferendam partem radiorum, nihilo minus æqualis in tota superficie lux visa est. An igitur nulla ibi maria, an Solis lucem magis quam apud nos aquæ, aut minus terræ repercutiunt? an potius, (quod credibilius mihi videtur) densior ibi, quam in Jove aut Marte, Vaporum regio à Sole illustrata, Venerisque globum circundans, omnem fere illam quam videmus lucem ad nos remittit, vixque subjectorum sibi marium terrarumque discrimen percipi sinit? Nam certum est nostram quoque atmosphæram, si Tellurem procul intueri daretur, plurimum obstituram luce sua, quo minus terræ marisque tam diversa claritas apparere posset, quam quæ cernitur ex edito scopulo despicienti. Eadem ratione qua Lunæ quoque maculas interdiu minus aperte quam noctu animadverti sinunt vapores iidem; quoniam tunc quoque inter illam oculosque nostros interpositi, Solisque luce illustres, visui officiunt: noctu non item.

In Marte. At in Marte reliquis disci partibus obscuriores, ut jam dixi, maculæ notantur. Ex quarum recursibus pridem fuit observatum dies noctesque illic iisdem fere quibus apud nos intervallis reverti. Hyemem vero æstatemque exiguo discrimine incolæ sentiunt, eo quod axis diurnæ conversionis paulum duntaxat ad orbitam Planetæ inclinatur, ut ex motu macularum intellectum est. Qui autem ex globo illo Tellurem nostram intuentur, eodem modo fere, ac Venus nobis, apparere iis debet, formasque lunaribus similes ostendere, si telescopio spectetur; nec ultra gradus 48 à Sole evagari; in cujus disco etiam conspici quandoque possit, uti & Veneris Mercuriique corpuscula. Et hoc quidem nunquam aliàs; Venus raro iis apparere debet, uti nobis Mercurius. Terræ vero solum in Marte nigriore materia constare verisimile est, quàm in Jove, aut etiam Luna nostra; eoque fieri ut rubicundior Mars spectetur, nec, pro ratione intervalli quo

quo à Sole abest, lucem remittat. Minor verò est globus ejus quam stellæ Veneris, licet à Sole longius distans, ut jam supra animadvertimus. Nec Lunam habet ullam comitem; atque in eo Telluri nostræ, quemadmodum & Venus & Mercurius, dignitate impar videtur. Lux vero Solis, calorque, Marticolis duplo atque interdum triplo quam nobis minor sentitur; nullo tamen, ut credimus, ipsorum incommodo.

Jovem & Saturnum reliquis Planetis longe præstare, tam magnitudine, quam Lunarum multitudine.

Quod si Tellus hæc, propter adjunctam ei Lunam, præstare cæteris Planetis, quos huc usque percurri, dicenda est; nam magnitudine nec cedit iis multum, nec superat; quantopere & his tribus, & Telluri ipsi, anteponenda erunt sidera Jovis & Saturni. In quibus sive globorum molem consideremus longissimè omnium istorum corpuscula excedentem; sive Lunarum quibus ambiuntur multitudinem, prorsus verisimile sit has duas primarias habendas esse Tellures, inter eas quæ circa Solem sunt: præ quibus reliquæ quatuor sint minimum quidpiam, ac nequaquam cum iis comparandæ. Quanta enim sit differentia, quò rectius animo concipiatur, subjicere hic placuit, secundum proportiones veras, aut non multum à veris abeuntes, tum Tellurem nostram, cum circumjecta Lunæ orbita, ipsoque in ea Lunæ globulo; tum Jovis ac Saturni systemata: Illud quaternis, hoc quinis Lunis exornatum; quarum quæque in sua itidem orbita ponuntur. Joviales Galilæo deberi notum est; quæ quanto animi gaudio primum illi animadversæ sint, facile quivis secum reputet. Saturniarum una nobis obtigit, quæ cæteris clarior est, & ab extrema proxima. Quam Anno 1655 telescopio nostro non ultra duodecim pedes longo, primi deprehendimus. Reliquæ diligentissimis Dominici Cassini observationibus patuerunt, vitreis orbibus utenti à Jos. Campano expolitis, primùm 36 pedum; deinde totidem supra centenos. Tertiam enim quintamque vidimus Anno 1672, ipso monstrante Cassino, & postea sæpius. Primam, cum secunda, sibi repertas significavit, missis literis, Anno 1684. Hæ vero difficillimè cernuntur, certoque affirmare nequeo mihi conspectas ha-

TAB. LIII.

hactenus. Nec propterea quidquam vereor Clarissimo Viro fidem habere, atque has quoque Saturno socias adscribere. Imo præter harum numerum alias quoque, vel unam vel plures, latere suspicari licet; nec deest ratio. Cum enim, inter extremas duas, spatium amplius pateat quàm pro distantiis cæterarum; posset hoc insidere sextus satelles: vel etiam, ultra quintum, alii circumvagari, qui propter obscuritatem nondum sint visi: cum ille ipse quintus, tantùm in orbitæ suæ parte quæ ad occidentem spectat, cernatur, in reliqua nunquam appareat; cujus rei causam satis intellectu facilem postea adferemus.

Fortasse autem, ubi ad signa Borea Saturnus revertetur, altéque supra horizontem attolletur, (nam, quo tempore hæc scribimus, maximè deprimitur) aliquid circa hæc novi observare continget, si quis tuas tunc lentes, Frater optime, ad Telescopia pedum 170. & 210. paratas, sideribus applicet: quibus majores, formæque perfectioris, nullas hactenus extare arbitror. Quanquam enim cælo nondum eas admovimus, vel propter moliendi difficultatem, vel quod discessus tuus studia hæc nostra conatusque interrupit: omni tamen vitio eas carere certi sumus, post experimenta illa faciliora, quæ in ambulacris suburbanis sub noctem instituebamus; inspectis procul literis, quibus appositum erat lumen. Quorum equidem lubens reminiscor, simulque jucundi laboris nostri, quem, in elaborandis expoliendisque vitreis hujusmodi discis, impendere unà solebamus; excogitatis novis artificiis machinisque, semperque ulteriora agitantes. Sed redeo ad diagrammata ante descripta, de quibus aliqua dicenda supererant.

Proportio diametrorum tum Jovis, tum orbitarum satellitum ejus, ad orbitam Lunæ circa Terram.

Feci in iis Jovialis globi diametrum duarum circiter tertiarum ejus distantiæ quæ inter nos nostramque Lunam interjacet; quandoquidem plus quàm vicies diametrum Terræ diameter Jovis continet; Luna autem distat à Terra diametris hujus triginta. Orbitam vero comitis Jovis extremi ad nostræ Lunæ orbitam posui sicut $8\frac{1}{2}$ ad 1, quoniam ejusmodi inter eas proportio re ipsa reperitur. Et hi quidem comites,

tes, five Lunæ fingulæ, non videntur Tellure noſtra minores eſſe, ut ex umbris earum in Jovis diſco ſæpe obſervatis, probari poteſt. Sunt autem (ut hoc quoque addamus) periodorum tempora ſub Ecliptica, apud Caſſinum, intimi Jovialium dies 1, horæ 18, 28′, 36″. Secundi dies 3, horæ 13. 13′. 52″. Tertii dies 7. horæ 3. 59′. 40″. Quarti dies 16, horæ 18. 5′. 6″. Diſtantiæ à centro Jovis, comitis intimi $2\frac{5}{6}$. Jovis diametrorum. Secundi $4\frac{1}{2}$. Tertii $7\frac{1}{6}$. Quarti $12\frac{2}{3}$. In Saturniis periodica tempora, intimi, dies 1, horæ 21, 18′, 31″. Secundi dies 2, horæ 17, 41′, 27″. Tertii dies 4, horæ 13. 47′, 16″. Quarti dies 15, horæ 22, 41′, 11″. Quinti dies 79, horæ 7, 53′. 57″. Diſtantiæ à centro Saturni, diametris Annuli dimenſæ, Comitis intimi, $\frac{19}{20}$. Secundi $1\frac{1}{4}$. Tertii $1\frac{3}{4}$. Quarti 4, quæ mihi erat $3\frac{1}{2}$. Quinti 12. omnia magnis laboribus vigiliiſque reperta.

Tempora periodorum comitum Jovialium.

Ecquis jam ſyſtemata hæc inſpiciens, atque inter ſe conferens, non ſtupet ad magnitudinem, ingentemque paratum duorum præ exiguo tenuique Telluris noſtræ? aut cui nunc in mentem venire poteſt in hac una Solem ambientium, omnem ornatum, omnia animalia, omnes qui cœleſtia mirentur inveniri; in illis vero nihil impoſuiſſe rerum conditorem; nec alio fine tam vaſtas corporum moles creaſſe, quam ut lucem eorum nos homunculi intueremur, curſumque forſitan inquireremus?

Credo equidem futuros qui falſa aut incerta eſſe dicant, quæ de magnitudine cœleſtium ſpatiorum nobis hic ſumuntur. Scio enim quam difficulter quiſquam adducatur, qui orbis Terrarum ſpatia mirari aſſueverit, inque eo tot populos, urbes, imperia; ut alibi exſtare credat quorum collatione hoc totum tam ſit exiguum quam hæ figuræ demonſtrant. Atqui ex ſummorum hujus ætatis Aſtronomorum ſcriptis ea hauſimus, ex quibus iſtæ ſyſtematum inter ſe rationes conſequantur. Si enim Terra à Sole decem vel undecim mille diametris ſuis diſtat, ut Caſſinus in Gallia, apud Anglos Flamſtedius colligunt, parallaxium in Marte ſubtiliſſimis obſervationibus uſi; cum nos quoque probabili conjectura,

De hac proportione magnitudinis conſtare ex recentiorum obſervationibus.

duodecim mille diametros invenerimus; erunt & istæ orbium magnitudines inter se ferè quales hic descripsimus.

Quænam sit Solis apparens magnitudo & lux in Jove, & qui cognosci queat.

Sed de Jove dicere pergamus, ex quo Sol spectatus diametrum quintuplo quam apud nos minorem habet; ut proinde lucis calorisque illic pars tantum vigesima quinta sentiri possit. Sed ea lux nequaquam debilis putanda est, idque ostendit insignis Jovis per noctem claritas. Tum quod in Solis Eclipsibus quæ nobis contingunt, etiamsi nec vigesima quinta pars disci ejus superfit, ut me videre memini, non admodum sentiatur obscuratio. Si vero experimento inquirere libeat quanta sit illa in Jove Solis lux, sumatur tubus certæ longitudinis, isque parte altera obturetur, impositâ lamellâ in cujus medio foramen sit rotundum, ea latitudine quæ ad tubi longitudinem se habeat ut subtensa 6 scrupulorum primorum ad radium, hoc est fere ut 1 ad 570. Deinde ad Solem tubus obvertatur, radiique ejus per foramen ingressi excipiantur parte opposita, in chartæ candidæ folium, nec aliunde eo lux incidere possit. Hi radii imaginem Solis circulo referent, cujus claritas erit eadem quæ serenis diebus percipitur à Jovis incolis. Remotâ autem chartâ, si eodem loco oculus ponatur, videbit hic Solem ea magnitudine ac splendore, qui in Jovis globo consistenti appareret.

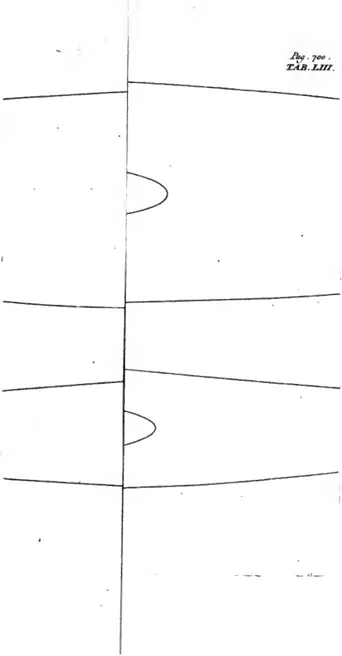
Eadem in Saturno.

Quod si in eodem tubo foramen duplo angustiori diametro statuatur, incidet in chartam, aut in oculum, lux ejusmodi qualis ad Saturnicolas pervenit. Quæ cum centesima tantum pars sit nostræ quam a Sole accipimus, tamen per tenebras noctis Saturnum satis lucidum nobis ostendit. In utroque vero Planetarum istorum, si nubilos quandoque dies habent, malignam tunc lucem esse oportet, si nostris oculis judicanda sit; at illorum habitatoribus talem haud dubiè, ut nihil de tenuitate ejus querantur. Sicut in noctuis, vespertilionibusque utilior gratiorque est crepusculi lux, aut quæ in ipsa nocte relinquitur, quam quæ diei tempore aërem terramque illustrat.

In Jove dies esse horarum quinque,

In Jove porro dierum spatia, quinque tantum horas nostrates æquare, ac noctes tantundem, admiratione non caret,

Pag. 700.
TAB. LIII.



ret, propter tantam illius globi præ nostro magnitudinem. Et ex hoc nimirum intelligitur naturam haudquaquam ea in re servasse rationem quæ est secundum globorum molem, aut eorum distantiam à Sole; cum etiam in Marte dies sint fere nostris pares. At in annorum longitudine, hoc est, tempore circuitus circa Solem, certam omnino distantiarum, quibus ab illo Planetæ absunt, rationem habuit. Sunt enim ut harum cubi, ita quadrata temporum periodicorum, ut primus advertit Keplerus. Idque in comitibus Jovis & Saturni eodem modo se habere inventum est. Cum itaque anni & dierum tempora in Jove à nostris multum diversa sunt, tum dies hoc nomine etiam differunt, quod eadem semper sint longitudine. Perpetuo enim illic fruuntur æquinoctio, quoniam axem motus diurni Jupiter rectum ferme habet ad planum itineris sui circa Solem, nec ut Tellus obliquum; ut telescopiorum observationibus constat. Frigidiores autem & ibi sunt regiones quæ polis viciniores propter radiorum Solis obliquitatem; at longas noctes non patiuntur, sicut quæ sunt prope polos Terræ; sed tenebras lucesque habent, ut dixi, horarum quinque, ubique & semper. Ac nobis quidem haud sanè placeret tanta dierum brevitas, meliusque nobiscum agi putamus quod plus quam duplo longioribus utimur. Nulla tamen ratione, nisi quoniam potiora ducere solemus ea quibus assuevimus.

Et perpetuum æquinoctium.

Planetarum unum Saturnum ex Jove vident; cum cæteri nimium Soli vicini sint; ipseque Mars ab eo non ultra 18 gr. digrediatur. Ex quaternis vero quas habent Lunis, quin multò plus commodi capiant, quàm nos ex unica nostra, negare non possumus, vel eo solo quod perrarò illunes noctes experiantur. Si verò & maria sua navigant, de quo supra dictum fuit, egregiè cursus regere earum auxilio possunt. Ut prætercam spectaculi jucunditatem ex variis earum conjunctionibus, Eclipsibusque, quas quotidie intuentur.

Eadem porrò commoda ac spectacula, imò etiam majora, Saturnicolis evenire necesse est, cum ob quinque Lunarum numerum, tum ob mirabiles Annuli aspectus, nocte dieque

iis obversantes. Sed totam eorum Astronomiam, sicut in cæteris fecimus Planetis, exponere oportet.

Planeticolis stellas fixas eodem modo apparere, ac nobis.

Atque hic primum illud annotabimus, quod de omnibus dici poterat, sed hic magis mirandum est, stellas inerrantes è Saturno iisdem planè figuris, eademque luminis diversitate distinctas, atque apud nos spectari: idque ob immanem earum distantiam, de qua postea dicetur. Ad quam nempe illa, quam viginti quinque annis globus à tormento emissus pervaderet, perexigua censenda sit.

Eadem igitur signa Orionis, Ursæ, Leonis, & reliqua, Astronomi illic contemplantur; at non circum eosdem polos ac nobis sese convertentia, sed qui unicuique Planetæ diversas cœli partes obtineant.

Qualis sit Planetarum aspectus, dierum ratio in Saturno.

Sicut autem Jovis incolis solus Saturnus è primariis Planetis cernitur, ita Saturnicolis solus spectatur Jupiter; qui idem illis est quod nobis Venus, nec nisi 37 circiter grad. à Sole recedit. Quantam verò habeant dierum longitudinem, certò cognosci nequit. Sed, ex comitis intimi distantia ac periodo, exque eorum comparatione cum intimo Jovialium, verisimile fit non longiores esse dies illas quam sint in Jove; quas decem horarum esse diximus, aut paulo minus. Sed, cum hæ æqualiter in lucem ac tenebras dividantur, Saturnicolæ insignem inæqualitatem atque etiam majorem quam nos perpetiuntur, majusque etiam æstatis & hyemis discrimen; propter inclinationem axis globi Saturnii ad planum orbitæ suæ, quæ est partium 31; cum noster Terræ axis tantum 23 & dimidiæ obliquitatem habeat. Hæc eadem declinatio in Saturno, Lunas ejus longe evagari facit à Solis via, vel quam pro hac illi habent: atque etiam causa est, cur nunquam Lunas suas pleno orbe lucentes conspiciant, nisi æquinoctiorum tempore; quæ triginta annis nostris bis ibi contingunt. Idem denique axis positus phænomena varia, ac mirabilia, Planetæ ejus incolis præbet; quæ ut intelligi possint, totius Saturni cum Annulo figuram hic rursus describemus: in qua, sicut jam olim definivimus, cum mirum hunc fornicem è tenebris primùm erueremus, inter diame-

tros,

tros annuli globique ea erit ratio, quæ 9 ad 4. Vacuumque ſpatium inter utrumque interjectum, eandem quam annulus latitudinem habebit. Craſſitudinem autem hujus exiguam eſſe; obſervationes comprobant, quæ tamen ratione diametri, non nimia erit, etiamſi ſexcenta milliaria Germanica efficere putetur.

Sit igitur ſecundum hæc Saturni globus cujus poli A, B. Annuli diameter G N, obliquè inſpecti, ita ut Ellipſin anguſtiorem circunferentia ſua referat. Sunt igitur circa polos utroſque portiones ſuperficiei, arcubus C A D, E B F, 54 partium, definitæ, quas qui incolunt (niſi frigus forſan inhabitabiles reddit) nunquam Annulum conſpicere poſſint. Ex reliqua omni ſuperficie vident eum annis continuis quatuordecim, menſibus novem: quod eſt ipſis anni ſpatium dimidium. Altero dimidio abſconditur. Quocirca qui habitant in zona ampliſſima inter circulum polarem C D, & T V, æquatori annuloque ſubjacentem, quandiu ſuperficiem annuli ipſis obverſam Sol illuminat, vident media nocte portionem ejus K G L, arcus lucidi forma, qui utrimque ab horizonte exurgit, ſed medius interrumpitur umbra globi Saturnii partem G H tegente plerumque ad extremum uſque marginem. Poſt mediam verò noctem umbra eadem paulatim in partem dextram movetur, ſpectatori in hemiſphærio boreo agenti; in ſiniſtram verò, ſi in oppoſito verſetur. Evaneſcitque matutino tempore, manente tamen arcus ſpecie, quem tota die cernere poſſint, ſed tenuius lucentem quam nobis Luna noſtra interdiu conſpicitur. Siquidem ſua illis eſt atmoſphæra, ſive aër a Sole ſplendeſcens, ut probabile eſſe ſuperius oſtendimus. Nam ſi nihil tale haberent, non aliter interdiu quam noctu & annulum & Lunas ſuas, ſtellaſque inerrantes lucere viderent. Annuli porro ſpectaculum, hôc quoque pulchriùs eſſe oportet, quod eum in ſeſe converti, ex maculis quibuſdam, aut inæquali ſplendore animadvertunt. Neque enim ex tanta propinquitate hoc notari non poteſt, cum vel è Tellure noſtra inæqualis claritas, in ſuperficie annuli, appareat; quæ limbo exteriore, quàm in-

TAB. LIV. fig. 2.

Qualis ſit Annuli aſpectus in Saturno.

interiore, minor est. Simul autem, dum globi umbra in Annuli partem G H projicitur, etiam annuli umbra obscurat globi partem circa P F, quæ alioqui Solis luce frueretur. Ut proinde semper Zona quædam sit P Y E F, nunc latior, nunc angustior, cujus incolæ multo tempore conspectu Solis, annulique simul, priventur; qui tunc quoque stellarum partem aliquam illis aufert. Quod certè miraculi instar videri necesse est; intercepto Sole, in profundam noctem incidentibus; nec quid eam efficiat videntibus. Quo tempore Lunarum solo lumine se solantur. Altera anni parte dimidia, cum oppositam annuli superficiem Sol illustrat, eodem modo, luce fruitur hemisphærium T B V, quo prius T A V; & hoc vicissim tunc longas illas eclipses patitur. Sola æquinoctiorum sunt tempora, Sole in ipsum productum annuli planum incidente, cum lumine destitutus vix Saturnicolis apparere potest; quando nec nostris percipitur dioptris. Tenente nimirum Saturno, ex Sole viso, gradum Virginis, aut Piscium, vicesimum primum cum dimidio; quemadmodum in Saturnio systemate olim exposuimus. Ubi ratio quoque redditur eorum, quos diximus, exortuum Solis super Annuli planum, toto Saturnii anni decursu.

Apposui in schemate hoc, juxta Saturnum, Terræ nostræ, Lunæque globos, servata magnitudinum vera ratione; ut rursus intelligatur, quam exigua sit habitatio nostra, ad Saturni sphæram annulumque collata; quod continue cogitationi infixum habere expedit. Imaginem vero Saturniæ noctis, geminis annuli lucentis arcubus adversis, & quinque Lunis ornatæ, sibi quisque formare ex jam dictis poterit. Et de primi quidem ordinis Planetis, hæc fere erant quæ dicenda habebam.

Superest ut de Lunis quoque Saturno ac Jovi additis, ac præcipuè de nostra, quæramus, tam quæ ad phænomena astronomica attinent, quam quæ ad ornatum in earum superficie reperiendum, ac præsertim an aliquem esse probabile sit; quod hactenus facere distulimus.

De Luna pauciora conjici posse. Ac videtur quidem, cum tam propinquus nobis sit Lunæ glo-

globus; telescopioque utentibus multa particulatim conspicienda præbeat; plura quoque ac probabiliora de universa natura ejus, quàm de Planetarum cæterorum conjici posse, tanto quippe remotiorum. Sed contra evenit ut vix quidquam de Lunæ rebus dicendum reperiam, nimirum quia ejus generis Planetam nullum coram intueri contigit; cum in primariis illis aliter hoc sese habeat. Sunt enim, ut jam satis constat, generis ejusdem ac Tellus nostra, in qua, quid rerum geratur, quidve exstet, propè intuemur, eoque de cæteris similia quædam conjectandi ratio suppetit.

Satellitum Saturni & Jovis eandem ac Lunæ rationem esse.

Illud vero sine omni dubitatione statuere possumus, ejusdem naturæ, ac Luna nostra, esse illas, quæ Jovem ac Saturnum comitari dictæ sunt, siquidem eodem prorsus modo primarios hosce Planetas circumeunt, simulque cum illis circum Solem feruntur, perinde ac cum Tellure Luna. Sed & aliam utrobique similitudinem intercedere postea videbimus. Quamobrem si quid de Lunæ statu conjicere possimus, (possumus autem pauca admodum) idem in quatuor illis circa Jovem, & in quinque Saturniis haud multo aliter se habere putandum erit. Illud semper menti infixum tenendo, non esse illas viliores aut minore ornatu excultas.

Lunam montibus & vallibus distinctam esse.

Illud igitur in Luna nostra apparet, etiam minoribus perspicillis trium quatuorve pedum longitudine, plurimis montium tractibus, rursusque planis vallibus latissimis, superficiem ejus divisam esse. Cernuntur enim montium umbræ ea parte quam a Sole aversam habent; ac frequenter jugo in circulum fere composito inclusæ valles quædam minores animadvertuntur; quarum medio monticuli, unus pluresve rursum eminent. Ex qua vallium rotunditate argumentum sumebat Keplerus, Lunicolarum, cum ratione operantium, immensas has esse molitiones. Sed hoc incredibile prorsus, tum ob nimiam earum magnitudinem; tum quod facile naturalibus causis cavitates ejusmodi orbiculares formari possint.

Carere vero mari.

Marium vero similitudinem illic nullam, (etsi & ille, & alii plerique omnes contra sentiunt) reperio. Nam regiones planæ ingentes, quæ montosis multo obscuriores sunt; quasque

que vulgo pro maribus haberi video, & oceanorum nominibus insigniri; in his ipsis, longiori telescopio inspectis, cavitates exiguas inesse comperio rotundas, umbris intus cadentibus; quod maris superficiei convenire nequit: tum ipsi campi illi latiores non prorsus æquabilem superficiem præferunt, cum diligentiùs eas intuemur. Quocirca maria esse non possunt, sed materia constare debent minus candicante, quàm quæ est in partibus asperioribus: in quibus rursus quædam vividiori lumine cæteris præcellunt. Nulli quoque fluvii in Luna inesse videntur. Non enim effugerent aciem perspicillorum nostrorum; saltem si inter montes aut ripas præaltas, ut nostri plerique, laberentur. Sed neque nubes ullæ sunt unde pluviæ generentur ad suppeditandum fluviis humorem. Si enim essent, videremus eas nunc has nunc illas Lunæ regiones obtegere, ac visui nostro subducere, quod nequaquam contigit, sed perpetua apparet serenitas.

Fluviis,

Nubibus,

Aëre & aqua.

Porrò nec aëre aut atmosphæra Lunam cingi, qualis circum Tellurem hanc ambit, manifestum est. Quia si qua talis existeret, non posset extrema Lunæ ora tam præcise circumscripta spectari, quam subeunte stella aliqua sæpe animadversa est; sed evanida quadam luce, ac velut lanugine finiretur, ut omittam vapores atmosphæræ nostræ maximam partem ex aquæ particulis constare; ac proinde, ubi nulla sunt maria aut fluvii, non esse unde eorum copia sursum educatur. Hæc igitur insignis differentia quæ Lunam inter Terramque nostram reperitur, omnem fere aditum conjecturis obstruit. Nam si maria amnesque inesse cernerentur, haud leve argumentum esset cæterum quoque Terræ ornatum ei convenire, veramque adeo esse Xenophanis opinionem, qui habitari in Luna dicebat, eamque Terram esse multarum urbium & montium. Nunc vero in solo arido, & omnis aquæ experte, non videntur neque herbæ, neque animantia exstare posse, cum omnibus istis humor materiam & alimenta præstare debeat.

Hinc de animantibus & stirpibus in-

Anne igitur credendum, tantæ magnitudinis globum in hoc conditum esse ut noctu nobis lucem tenuem largiatur, aut

aut æſtus maris cieat? Nemo erit qui pulcherrimo inde ſpectaculo fruatur Telluris noſtræ in ſe revolutæ, & nunc cum Europa Africam, nunc Aſiam, nunc Americam oſtentantis; nunc plene, nunc dimidio orbe lucentis? Omnes item quæ Jovem ac Saturnum circunſtant Lunæ, æquè inutiles vacuæque ferentur? Non habeo equidem quod dicam, cum nulla ab re ſimili conjectura ſuppetat. Magis tamen probabile videtur ob corporum præſtantiam, aliquid in ſuperficie eorum geri, aliquid creſcere ac vivere, qualecunque tandem id ſit, & quantumlibet à rebus noſtris diverſum. Poſſet forſan ſtirpium animaliumque ibi vitam aliud quid, aquæ noſtræ diſſimile, ſuſtentare. Poſſet exiguus humor in terra, non æque ac noſtra, aquam combibente, ſufficere radiis Solis, unde rorem educerent, alendis herbis arboribuſque idoneum. Quod idem Plutarcho in mentem veniſſe video in eo qui de Facie in orbe Lunæ eſt dialogo. Nam neque apud nos, niſi ſumma maris ſuperficie, ac tenui veluti pellicula opus eſſet, ad humorem terris, ſatiſque ſuppeditandum, quem Solis vis elicuiſſet, quique in rorem tantum, non vero in nubes condenſaretur. Sed hæ admodum leves ſunt conjecturæ aut ſuſpiciones potius, nec aliud habemus ex quo de Lunæ noſtræ, atque etiam reliquarum natura aliquid colligamus.

certiorem conjecturam eſſe.

Omnium enim, uti diximus, eadem putanda eſt; idque præter adductam ſuperius rationem, etiam hac alia confirmatur, quod ſicuti Luna noſtra eandem perpetuò faciem ad nos obverſam habet, ita & illæ Joviales ac Saturniæ ad ſuos Planetas primarios. Mirum videatur hoc ſciri potuiſſe; at non erat difficilis conjectura, poſtquam, ut paulo ante dixi, animadverſum fuit extremam Saturniarum tunc ſolum conſpici, cum Planetæ huic ad occidentem poſita eſt; ab oriente vero ſemper eam latere. Facile enim perſpicitur id inde evenire, quod magna ſui parte obſcuriorem ſuperficiem habeat hæc Luna; quæ pars obſcurior cum ad nos converſa eſt, tunc cerni nequeat præ luminis tenuitate. Cumque ſemper in orbitæ ſuæ latere quod orientem ſpectat obſcurata reperiatur, in altero nunquam, manifeſtum indicium eſt eandem

Jovis ac Saturni Lunas, non ſecus ac noſtram Telluri, eandem partem ſuo Planetæ obvertere.

globuli regionem semper Saturnum respicere, quoniam ex eo illud contingere necesse est. Quis vero jam dubitet, cum & illius omnium remotissimæ & nostræ Lunæ facies semper eadem ex primario Planeta suo spectetur, quin idem in cæteris, quæ circa Jovem ac Saturnum volvuntur, natura effecerit? Causa vero quare id fiat vix aliunde peti potest, quam quod densior ponderosiorque materia sit Lunarum omnium parte ea, quâ semper à Planetis suis aversæ sunt. Sic enim ea ipsa pars majore vi à centro circuitus recedere contendet: cum alioqui, ex motus legibus, eadem semper facies non ad Planetam, sed ad fixas stellas easdem, continue obverti debuerit.

Lunæ incolis si qui sint, qualis apparitura sit cælorum constitutio, dierum ratio, &c.

Porro ex hoc positu Lunarum ad Planetas suos mira quædam spectacula evenire necesse est eas habitantibus, qui an sint aliqui, ut jam apparuit, multo incertissimum est; sed quasi essent ponantur. Satis erit autem de nostræ Lunæ indigenis dixisse. His igitur sic in duo hemisphæria globus ejus dividitur, ut qui alterum incolunt, semper Telluris nostræ conspectu fruantur, qui reliquum, semper eo careant. Nisi quod quidam, circa confinia utriusque agentes, amittant eum per vices ac recuperent. Cernunt autem Gæoscopi illi Tellurem in æthere pendentem multo majorem quam quanta nobis Luna apparet, quippe ferè quadruplo ampliore diametro. Sed illud mirabile, quod nocte dieque eodem cœli loco velut immobilem perpetuo hærere vident; alii recta supra caput defixam, alii certa altitudine ab horizonte distantem, quidam & in ipso horizonte sitam: atque interea convertentem se circum axem suum, regionesque quas continet universas deinceps ostendentem horarum viginti quatuor spatio, atque eas quoque proinde (quod utinam videre liceret) quæ ad utrumque polum nobis incolis adhuc incognitæ manent. Præterea & lumine crescentem eam vident & imminutam menstrua periodo, atque ita per vices plenam, dimidiatam, inque cornua tenuatam, eâdem formarum varietate quam Lunæ globus nobis exhibet. Sed lucem à Tellure nostra accipiunt quindecuplo majorem quam nos ab illa. Adeo ut,

ut, in hæmisphærio meliore, ad nos obverso noctes insigniter claras habeant; nec tamen cum claritate illa ullus ad eos calor manare potest, etsi hoc aliter Keplero visum est. Sol verò semel illis oritur singulis mensibus nostris, semelque occidit, atque ita dies noctesque, quindecuplò quam nos longiores habent, at inter se æquales perpetuo æquinoctio. Qua dierum longitudine, quandoquidem non amplius ab illis quam à nobis Sol abest, necesse esset eos, quibus altè supra horizontem ascendit, æstu incommodo torreri, si corpora eorum perinde ac nostra afficiantur. Ascendit autem maximè iis qui circa confinia hemisphæriorum, quæ diximus, incolunt, qui vero inde procul distant, ac circa regiones habitant polis Lunæ suppositas, non magis ob longos istos dies calebunt, quam qui circa Islandiam aut novam Zemblam æstivo tempore cetos piscantur; qui persæpe frigora ingentia, ipsius solstitii tempore, ac trium licet mensium diebus, experiuntur. Sunt autem poli Lunæ, quos circum stellæ fixæ converti cernuntur in ea habitantibus, nequaquam iidem qui nobis, neque etiam cum Eclipticæ polis conveniunt, sed his circunferuntur, quinque gradibus semper distantes, idque periodo annorum novendecim. Anni autem spatium idem illic quod nobis; quod motu fixarum metiuntur ac reversione earum ad Solem. Idque iis perfacile est, cum diei tempore, non minus quam noctu, stellas conspiciunt, nihil impediente Solis claritate; quoniam, ut supra ostensum est, nullam vaporum sphæram habent; sine qua & nos interdiu cœlum sideribus plenum aspiceremus. Nec vero nubes quoque ullæ unquam obstant observantibus, adeo ut cursus Planetarum melius quàm nos investigare possint; sed tamen difficilius multò verum systema reperire. Quoniam incipientibus stare Terra sua videri debuit, in quo eos longius quàm nos error abduxit.

Hæc omnia vero ad Jovis & Saturni Lunas referuntur, quibus idem quod nobis Tellus est, sui sunt primarii Planetæ. Singula autem diei noctisque spatia simul sumpta, cujusque Lunæ periodus metitur, quas supra annotavimus.

Quod ad Jovis & Saturni Lunas facile transferre est.

 Quo

Quo fit ut Saturni quintam incolentibus, cujus periodus dierum nostrorum erat 80, eveniant sui dies noctesque nostris quadraginta æquales. Iisdem vero, propter Saturni revolutionem tricennalem, fiunt æstates hyemesque singulæ annorum nostrorum quindecim. Itaque tum propter tam longa frigora, tamque longos somnos vigiliasque; etiamsi nil aliud esset, plane aliam quam apud nos vitam illic fore manifestum est.

Explicuimus igitur hactenus, quæ ad Planetas primarios secundariosque Solem circundantes spectant. Hinc vero priusquam ad Solem ipsum & stellas fixas, tertium nempe genus cœlestium corporum, pergamus, operæ pretium videtur, ut magnitudinem, ac magnificentiam totius Solaris mundi, aliqua ratione, atque evidentius quam hactenus factum sit, exprimamus. Quod quidem schemate in foliis hisce descripto haudquaquam possumus, propter parvitatem corporum Planetariorum ad vastissimas orbitas suas collatorum. Sed verbis supplebitur quod descriptione perfici nequit. Itaque repetitâ figurâ quam superioris libri initio posuimus, cogitetur ei similis ac proportione respondens, sed quæ descripta sit in amplissima politissimaque areæ cujusdam planitie, cujus extremus circulus, Saturni orbem referens, trecentos sexaginta pedes semidiametro contineat. In cujus deinde circumferentia globus Saturni cum suo ponatur Annulo, quantus in figura altera cernitur, ubi Solis & Planetarum sunt corpora. Cæterique similiter globi in sua quisque orbita collocentur; inque medio omnium Sol qua magnitudine ibi designatur, quatuor nempe pollicum diametro. Ita Telluris circuitus, quem *magnum orbem* vocant Astronomi, semidiametrum sortietur pedum triginta & sex. In quo Tellus ipsa milii grano non major circumferri cogitanda est; eique comes Luna, vix punctum visibile superans, in circello paulo plus quam duos pollices lato; velut in adscripto hic diagrammate. In quo linea A B circumferentiæ partem refert ejus, quam diximus, Telluris orbitæ, cujus triginta & sex pedes continet semidiameter. In ea Tellus est cir-

TAB. LIV. fig. 1. *Solaris mundi secundum veram proportionem descriptio.*

TAB. LV. fig. 1.

TAB. LV. fig. 2.

circellus C: Lunæ vero circum eam via, circulus DE; in quo Lunæ corpusculum quale ad D expressum est.

Saturniarum vero Lunarum exterior in circulo feretur cujus semidiameter pollicum 29. Jovialium item exterior in minore aliquanto, cujus semid. poll. 19½.

Sic demum habebitur germanus & omni proportione perfectus solaris Regiæ typus, in quo jam Tellus duodecim mille diametris suis à Sole aberit. Cujus spatii amplitudo si milliarium numero designanda sit, plus quam septemdecim milliones, ut vocant, milliarium Germanicorum comprehendet. Sed melius fortasse hanc vastitatem animo concipiemus, si motus cujusdam celeritate eam metiamur, Hesiodi Poëtæ exemplo; qui altitudinem cœli, & Tartari profunditatem æquis spatiis definiens, novem dierum noctiumque lapsu, ferream incudem è cœlo dimissam, ad terram decimâ pervenire scripsit; ac tanto quoque tempore è Terræ superficie cadentem ad Tartara ferri. Nos vero non incudis lapsum sed continuam potius celeritatem globi ex majore tormento emissi huc adhibebimus; quem singulis horæ secundis scrupulis, sive arteriæ pulsibus, centum circiter hexapedas conficere experimentis compertum est, quæ in Balisticis Mersennus commemorat; cum sonus eo tempore ad centenas octogenas extendatur.

Immensitas intervallorum inter Solem & Planetas, illustratur comparatione cum motu globi è tormento emissi.

Ajo igitur, si ex Terra ad Solem tanta illa celeritate globus continuè feratur, fere annos 25 esse insumpturum antequam iter hoc peragat. Ut proinde à Jove ad Solem 125 annis opus habeat, à Saturno 250. Et hic quidem calculus ex mensura Terræ diametri pendet, qui ex probatioribus Gallorum observationibus est hexapedarum Parisiensium 6538594. cum gradus unus circuli maximi efficiat hexapedas 57060. Quanta itaque sint istorum orbium spatia, quamque exilis, eorum respectu, Telluris globulus, in quo tam multa homines molimur, tantum navigamus, tot bella gerimus, ex his intelligitur. Quod utinam discant cogitentque Reges & Monarchæ nostri; ut sciant quantilla in re laborent cum de angulo aliquo terræ occupando totis viribus, magno multorum

malo, contendunt. Sed ad nostra revertamur, ac de Sole videamus, cujus jam simul ad Planetas & eorum orbitas magnitudinem ampla illa descriptio, quam exposuimus, demonstrat.

In Sole omnem conjecturam deficere.

In hoc igitur ipso Sole non improbabile quibusdam visum est animalia vivere posse. Sed cum multo magis etiam, quam in Lunis, conjectura omnis hic deficiat, nescio qua ratione id ita esse opinati sint. Non enim adhuc planè compertum est, utrum dura an liquida sit vasti illius globi materies; etsi propter lucis naturam, quam aliàs explicui, magis verisimile sit liquidam esse; quod etiam perfecta rotunditas ejus, lumenque per totam superficiem æqualiter diffusum suadere videtur. Nam exigua quædam in disci circunferentia apparens inæqualitas, quæ telescopiis, nec tamen semper, cernitur, & ex qua miros *undarum fluctus, flammarumque eructationes*, nonnulli sibi fingunt, nihil aliud est quàm vaporum prope Terram nostram tremula agitatio, quæ & stellas noctu scintillare facit. Neque ego faculas illas, quas unà cum maculis fere omnes celebrant, unquam videre potui, etsi has sæpius spectaverim; ac valde dubito an aliquid in Sole, ipso Sole lucidius appareat. Invenio enim, fideliores observationes consulens, non nisi in nubeculis illis subfuscis, quæ maculas plerumque circundant, aliquando solæ feruntur, puncta quædam clariora interdum notari, quæ non mirum esset, propter obscuritatis illius viciniam, splendidiora quam sint videri. Summum quidem in Sole calorem, fervoremque esse, certo credendum est, in quo nihil omnino nostrorum corporum simile vivere possit, aut momento superesse. Itaque aliud genus viventium animo concipiendum esset, longeque ab omni natura eorum quæ unquam vidimus, aut cogitavimus, diversum. Quod fere idem est ac si dicamus nihil hic conjectando nos consequi posse. Est quidem tam præstans, tantæque molis corpus haud dubiè maxima ratione, ac propter insignem usum aliquem creatum. Sed an non apparet jam abunde utilitas ejus in mirabili illa lucis calorisque in totum Planetarum circumstantium chorum effusi-

Faculas Solares incertas videri.

Propter calorem nulla illic vivere copora nostris similia.

fione; ex qua univerſo animantium generi non vita ſolum conſtat, ſed & jucunda ut ſit efficitur? Idque non in exiguis ſolum, qualis Tellus noſtra, ſed & in tanto majoribus Jovis & Saturni globis, quorum non eſt contemptibilis ad Solem collata magnitudo. Hæc quidem tanta ſunt ut nihil mirum ſit eorum gratia duntaxat Solem eſſe conditum. Nam quod Keplerus opinabatur, aliud quoque illi delegatum eſſe munus, ut nempe omnium circum ambientium Planetarum motus in ſuis orbibus incitaret, propria ſua circa axem converſione, quod in Epitome ſyſtematis Copernicei multis comprobare conatur, non poſſum aſſentiri, propter ea quæ in ſequentibus dicentur.

Stellas fixas totidem eſſe Soles.

Solem ex ſtellis inerrantibus unam eſſe, ante Teleſcopii inventionem, adverſari videbatur Copernici ſententiæ; quia cum ſtellæ, quæ dicuntur primæ magnitudinis, cenſerentur trium ſcrupulorum diametro, eſſentque ſecundum Copernicum tam procul remotæ, ut totus ille Orbis magnus, quo Terra defertur, velut puncti inſtar eſſet ad ſphæram affixarum comparatus; quandoquidem toto anni tempore, etſi locum Terra mutaret, nihil mutari cernerentur ſtellarum diſtantiæ; ſequebatur ſingulas earum, quæ cæteris clariores apparent, majores eſſe toto illo magni orbis ambitu: quod abſurdum erat. Atque hoc, ut palmarium contra Copernici doctrinam argumentum, Tycho Braheus objectabat. Sed poſtquam radios ſtellarum nudo viſu apparentes, Teleſcopia ſuſtulerunt; (quod ita optimè faciunt, ſi lens oculo proxima flammæ afflatu obſcuretur) atque ita haud aliter eas ac puncta lucentia ſpectandas præbuerunt; prorſus ſublata quoque eſt ea difficultas, nec quidquam jam impedit quominus ſtellæ iſtæ pro totidem Solibus habeantur. Idque eo probabilius redditur, quod conſtet propria luce ſua eas lucere: tanta enim eſt diſtantia, ut à Sole illam mutuari nequaquam poſſint. Singulas vero Sole minores non eſſe nihil credi vetat, cum ex tam immenſo intervallo tam vividum lumen fundant. Hanc itaque ſententiam nunc paſſim tenent qui Copernici ſyſtema amplectuntur. Qui recte quoque hoc

Eas ſpargi per vaſta ſpatia.

ſta-

spatia, & alias ab aliis, ut proximas à Sole removeri.

statuunt, non in una eademque superficie hærere stellas istas; tum quod nulla ratio hoc suadeat, tum quod in eandem sphæram Sol, qui earum una est, referri nequeat. Itaque verius esse spargi eas per vasta cœli spatia, quantumque à Terra aut Sole ad proximas interjacet, tantum circiter ab his esse ad sequentes, atque inde rursus ad alias, continuo progressu.

Nec Solem præ cæteris eminere contra Keplerum notatur.

Scio etiam hic aliud sentire Keplerum, in ea, quam diximus, Epitome. Quamquam enim existimet tota cæli profunditate stellas disseminatas esse, vult tamen Solem hunc nostrum multo amplius spatium circa se habere, quasi sphæram vacuam, supra quam confertius stellis cœlum incipiat. Putabat enim alioqui futurum ut paucæ tantum stellæ numerarentur nobis, eæque summa magnitudinis diversitate: *nam cum omnium maximæ tam appareant parvæ, ut vix instrumentis possint notari aut mensurari, consequens esse ut quæ duplo aut triplo &c. distarent longius, duplo & triplo appareant minores, positis æqualibus ipsis veris magnitudinibus; citoque veniatur ad eas quæ penitus fiant insensibiles: atque ita paucissimas visum iri stellas, easque in maxima differentia;* cum contra amplius quam mille observentur, nec magnitudine ita multum diversæ. Sed ex his nequaquam id quod ille intendit evincitur; ac præcipue in eo deceptus fuit, quod non advertit ignium, & flammæ eam esse naturam, ut ex maximis intervallis cerni possint, iisque unde alia corpora, æque exiguis angulis comprehensa, prorsus evanescant. Quod vel lucernæ comprobant, quæ per urbium nostrarum vicos noctu incenduntur. Quæ cum ad centenos pedes inter se distent, tamen earum viginti & plures, in continua serie magis magisque remotas, numerare licet, etsi vicesimæ flammula vix 6 secundorum scrupulorum angulo conspiciatur. Idem vero multo magis fieri necesse est in eximia illa stellarum luce; adeo ut nihil mirum sit, ad mille aut duo millia earum, oculis notari posse; Telescopiis vero adhibitis, etiam vigecuplo plures deprehendi. Sed suberat ratio, cur Keplerus Solem præ reliquis stellis præcipuum

puum quid habere cuperet; circumque eum esse unicum, in Natura, Planetarum systema, idque mundi medio situm. Hisce nimirum opus habebat ad confirmandum mysterium Cosmographicum suum, quo certis quibusdam proportionibus respondere volebat Planetarum à Sole distantias diametris sphærarum, quæ corporibus polyedris Euclideis inscribuntur & circunscribuntur singulis. Quod tum demum verisimile videri poterat, si in mundo universo unus tantum esset circa Solem aberrantium siderum chorus, adeoque & Sol ipse solus sui generis.

Sed mysterium illud totum, si bene perpendatur, somnium quoddam ex Pythagoræ aut Platonis Philosophia enatum esse apparet. Nec proportiones satis quadrant, ut ipse quoque auctor agnoscit; sed, cur hoc ita sit, alias causas plane frivolas comminiscitur. Idem levioribus etiam argumentis probat extremam mundi superficiem, stellas omnes continentem, sphæricæ esse figuræ; ac numerum præterea earum necessariò esse finitum, ex eo quod singularum finita sit magnitudo. Illud vero vanissimum, quod à Sole, ad superficiem cavam sphæræ fixarum, definit spatium sexies centena millia Terræ diametrorum. Quoniam scilicet, sicut Solis diameter ad diametrum Orbitæ Saturni; quos inter se esse statuit ut 1 ad 2000; ita sit hic diameter ad illum sphæræ fixarum interioris; quod nulla ratione nititur. Atque hæc quidem Viro summi ingenii, magnoque Astronomiæ instauratori excidisse mirum est. Nos vero unà cum præcipuis nostræ ætatis Philosophis, ne dubitemus eandem stellarum earum & Solis naturam existimare. Ex quo jam mundi idea multo major nascitur, quam quæ ex hactenus traditis percipiebatur. Quid enim nunc prohibet, quin unamquamque ex stellis hisce, sive Solibus, haud aliter ac Sol noster, circum se Planetas habere putemus, quæ rursus suis Lunis stipatæ sint? Imo hoc ita se habere, manifesta ecce ratio suadet. Etenim si cogitatione in cœli regionibus nos ponamus, non minus à Sole, quàm fixis stellis, remotos, nihil quicquam discriminis hasce inter atque illum tunc essemus animadversuri. Longè enim abest ut corpora Pla-

Nihil impedire, quo minus credamus circa unamquamque ex fixis, ut circa Solem, esse Planetas.

netarum, Solem ambientium, conspecturi simus, vel ob tenuissimam eorum lucem, vel quod universæ, quibus feruntur, orbitæ in unum idemque lucidum punctum cum Sole confunderentur. Hic igitur positi, merito eandem omnium stellarum rationem naturamque esse existimaremus; & ex una, propius inspecta, de cæteris quoque judicari posse nihil ambigeremus. At nunc Dei benignitate, ad unam ex ipsis, Solem videlicet nostrum, admoti sumus, ac tam prope accessimus, ut circum eam sex minores globos converti cernamus; & circa horum quosdam, alios obire secundarios. Cur itaque non eo judicio nunc utamur; ac prorsus verisimile putemus non solam hanc stellam tali comitatu cingi, aut aliqua in re cæteris præminere? Neque etiam solam circum axem suum converti; sed potius cæteras omnes eadem hæc similia habere? Ergo hac ratione etiam cuncta illa quæ in Planetis circumsolaribus inesse, ad Terræ nostræ similitudinem disseruimus, consentaneum erit, ut ad innumeros Planetas alios, tot mille Solibus additos, æquè pertinere credamus. Eruntque & illic stirpes & animalia, atque etiam ratione instructa, quæ cœli convexa mirentur, & sidera observent, motusque eorum intelligant, atque omnia denique habeant, sine quibus neque hæc haberi posse supra ostendimus.

Quam mirabilis igitur quamque stupenda mundi amplitudo & magnificentia jam mente concipienda est. Tot Soles, tot Terræ, atque harum unaquæque tot herbis, arboribus, animalibus, tot maribus, montibusque exornata. Et erit etiam unde augeatur admiratio, si quis ea, quæ de fixarum stellarum distantia & multitudine hisce addimus, perpenderit.

Tantam igitur esse distantiam hanc, ut quæ Solem Terramque interjacet, Terræque diametrorum duodecim millia continet, ei comparata, exilis plane habenda sit, non una ratione constat: atque hac inter cæteras, quod si proximæ quædam inter se stellæ notentur, quæ claritate plurimum differunt; velut in media caudæ, (quæ duplex est) Ursæ ma-

majoris; nulla apparentis intervalli earum mutatio animadvertitur, quocunque anni tempore spectatarum; quod tamen fieri necesse esset, propter diversas visus positiones per annui Orbis ambitum, oriretur que parallaxis aliqua si, ut consentaneum est, propior sit stella quæ lucidior apparet. Qui autem ante nos definiendi tam vasti spatii rationem inierunt, nihil certi comprehendere potuerunt, propter nimiam observationum necessariarum subtilitatem, quæque omnem diligentiam superet. Itaque mihi unica hæc via superesse visa est, quam nunc insistam, qua saltem verisimile quid in re tam exploratu ardua consequamur. Cum ergo stellæ ut jam diximus, totidem sint Soles; si earum aliquam Soli æqualem esse sumamus, erit illius tanto major quam Solis distantia, quanto apparens diameter diametro Solis minor erit. Sed tam exiguæ apparent stellæ, etiam quæ primæ sunt magnitudinis, atque etiam Telescopio spectatæ, ut veluti puncta lucentia sine visibili latitudine refulgeant. Quo fit ut ejusmodi observationibus nulla earum mensura deprehendi possit. Cum itaque hac non succederet, tentavi qua ratione Solis diametrum ita imminuere possem ut non majorem lucem quam Sirius, aut aliud è clarioribus sideribus, ad oculum mitteret. Ergo occlusi rursus, ut supra, tubi duodecimpedalis vacui aperturam alteram lamella tenuissima, cujus medio tam exiguum effeci foramen, ut Lineæ partem duodecimam non superaret, sive pollicis centesimam quadragesimam quartam. Hunc tubum ea parte ad Solem obverti; altera oculo admovi; qui tunc particulam Solis cernebat, cujus diameter, ad totius diametrum, erat ut 1 ad 182. Sed eam particulam multo clariorem comperiebam, quàm noctu Sirius apparet. Itaque cum longè magis arctandum Solis diametrum viderem, id ita effeci, ut, in perforata ejusmodi lamina, vitreum globulum objicerem minutissimum, pari circiter diametro ac prius illud foramen habebat; quo globulo ad microscopia antehac usus fueram. Ita per tubum in Solem intuenti, contecto undique capite, ne quid diei lux turbaret, non minor ejus claritas quam Sirii videbatur.

Modus probabiliter investigandi distantiam fixarum à Sole.

Atqui, ex Dioptrices legibus instituto calculo, fiebat jam Solis diameter $\frac{1}{182}$ ejus particulæ centesimæ octogesimæ secundæ, quam, per foramen exiguum, prius conspexeram. Ductis autem in se $\frac{1}{182}$ & $\frac{1}{152}$, fit $\frac{1}{27664}$. Ergo eousque contracto Sole, vel eousque remoto, (erit enim effectus idem) ut diameter ejus sit $\frac{1}{27664}$ ejus, quem in cœlo intuemur, supereſt illi lux quæ Sirii luci non cedat. Solis vero eousque remoti distantia erit necessario, ad eam quam nunc habet, ut 27664 ad 1: & diameter paulum excedet 4 scr. tertia. Itaque cum æqualis ei Sirius ponatur, sequitur Sirii quoque diametrum totidem esse ejusmodi scrupulorum; distantiamque itidem, ad eam qua à Sole absumus, ut 27664 ad 1. Quod quàm incredibile sit intervallum, apparebit eadem ratione, quam in æstimanda Solis distantia adhibuimus. Nam si 25. annis opus habebat tormenti bellici globus, continua velocitate, quanta exploditur, incedens, ut à Terra ad Solem perveniret; jam numerus 27664 vicies quinquies ducendus est, atque ita fiunt 691600, adeo ut penè septingenta annorum millia insumpturus sit globus, in tanta celeritate sua, priusquam ad proximas stellarum inerrantium perveniat. Atque ad has stellas serena nocte oculos circumferentes, quantum horum judicio comprehendere possumus, vix aliquot milliaribus supra verticem eas exstare putamus. Quæsivi vero de proximis tantum. Cæteræ enim cum, ut jam diximus, iis spatiis in ulteriora cœli recedant, ut non minora sint deinceps à propioribus ad sequentes, quàm à Sole ad istas, quanta immensitas supereſt! Si enim plures quàm mille, nudo visu notantur; telescopiis verò decuplo aut vigecuplo amplius; quomodo sciri potest aut definiri, quanta sit multitudo ulteriorum, quas neque hoc auxilio attingere licet: aut quis numerus nimis magnus dicendus est, si ad Dei potentiam spectemus? Etenim, sæpe hæc cogitanti mihi, in mentem venit, tantùm in primis numerorum exordiis calculos omnes nostros versari. Esse enim in serie eorum infinita, qui non tantùm viginti aut triginta, aut centum, aut mille notis scribantur in progressione nostra denaria; sed

qui

qui tot characteribus constent, quot arenæ grana in tota Telluris mole continerentur. Quis vero dicere audeat tali numero non majorem esse multitudinem stellarum inerrantium? Nam longè ulterius progressi sunt, qui infinitam esse dixerunt; ut Veterum aliqui, atque etiam Jordanus Brunus; qui pluribus argumentis hoc se evicisse putat, sed, ut mihi videtur, parum firmis. Nec tamen contrarium quoque perspicuis rationibus probari posse existimo. Illud constat, spatium naturæ universæ infinitè undique protendi; at nihil obstat, quin, ultra definitam stellarum regionem, res alias innumeras Deus effecerit, à cogitationibus nostris, æque, ac sedibus, remotas.

Quid si verò nec innumeras quidem condidit, sed ultra eas vacuum reliquit infinitum; ut totum illud, quod exstare voluit, veluti nihil sit præ iis quæ producere ejus omnipotentia potuisset? Sed ulteriorem horum inquisitionem, totamque illam de infinito difficillimam disputationem persequi omitto, ne ad tot maximarum rerum comprehensionem, qua jam defuncti sumus, novus labor accedat. Ea tantùm hic subjungam, ex quibus, quænam sit nostra de toto mundi spatio opinio, cognoscatur; quatenus nempe Solibus seu stellis inerrantibus patet, quibus sua circumponi planetaria systemata, probabile esse antea ostendimus.

Existimo itaque unumquemque Solem circumdari vortice quodam materiæ celeriter motæ, sed qui multum dissimiles sint Cartesianis illis, tum spatii ratione, tum motus genere, quo in illis materia agitetur. Ea enim apud Cartesium est vorticum amplitudo, ut quisque eorum alios se circumsistentes contingat, occurrens singulis plana superficie, veluti cum in aqua sapone imbuta bullarum cumulos pueri inflant: moveri vero universam cujusque materiam statuit, in partem eandem rotando. At hunc motum non parum impediri oporteret, propter angulosam vorticum superficiem. Deinde cum sit ejusmodi, ut, velut circa axem cylindri, materia tota feratur, exoritur ei postea non exigua difficultas, cum globosam Solis formam ex hoc motu deducere conatur: fru-

Unumquemque Solem vortice cingi, sed Cartesianis multum dissimili; contra quem pluribus disputatur.

ſtra prorſus, atque iis rationibus, quæ incautis aliquid eſſe videantur, cum reipſa nihil explicent. Vult præterea innatare, ac circunferri cum hac materia ætherea, Planetas; atque ea ratione videlicet in ſuis orbibus eas retineri, quòd non majore vi, quàm ipſamet, à centro motus recedere conentur. Sed hic ex Aſtronomicis complura objiciuntur, de quibus aliqua attigimus in diatriba de cauſſis gravitatis. Ubi & aliam rationem expoſuimus, quæ Planetas intra orbium ſuorum limites contineret. Ea eſt gravitas eorum Solem verſus; quæ unde exoriatur oſtendimus, quamque eo magis miror Carteſium prætermiſiſſe, quod de gravitate, qua corpora in Terram feruntur, primus ſolito meliora adferre cœpiſſet. Refert Plutarchus in libro ſupra memorato de Facie in orbe Lunæ, fuiſſe jam olim qui putaret ideo manere Lunam in Orbe ſuo, quod vis recedendi à Terra, ob motum circularem, inhiberetur pari vi gravitatis, qua ad Terram accedere conaretur. Idemque ævo noſtro, non de Luna tantum, ſed & Planetis cæteris ſtatuit Alphonſus Borellus; ut nempe Primariis eorum gravitas eſſet Solem verſus; Lunis vero ad Terram, Jovem, ac Saturnum, quos comitantur. Multoque diligentius ſubtiliuſque idem nuper explicuit Iſacus Neutonus, & quomodo ex his cauſis naſcantur Planetarum orbes Elliptici, quos Keplerus excogitaverat; in quorum foco altero Sol ponitur. Oportet autem, ſecundum noſtram de natura gravium ſententiam, quò Planetæ ad Solem ſuo pondere inclinent, vorticem turbinemve materiæ cœleſtis circa eum converti non totum in eaſdem partes, ſed ita ut variis motibus, iiſque celerrimis in omne latus ſecundum diverſas ſui portiones rapiatur, nec tamen dilabi poſſit, propter circunſtantem ætherem, qui non tali nec tam celeri motu agitetur. Hujuſmodi vortice gravitatem corporum in Terram, ejuſque effectus omnes explicare conati ſumus, in ea, cujus memini, diatriba. Eademque, ut puto, eſt ratio gravitatis Planetarum Solem verſus; & ex his quoque tam Terræ no-

nostræ, quàm cæterarum, atque etiam Solis, rotunditas consequitur; quæ in Cartesiana hypothesi tantum habet incommodi.

Porro & spatia horum vorticum, ut dixi, multo quam ille contractiora pono. Sic enim fere eos statuo in vasta cœli profunditate dispersos, quemadmodum turbines aquæ exiguos, hinc inde in spatioso lacu stagnove, baculi agitatione, excitatos, ac magnis intervallis totisque stadiis distantes. Et sicuti horum motus nequaquam ab unis ad alios perveniunt, nec proinde sese mutuo impediunt; ita quoque cœlestium vorticum motus, circum astra aut Soles, se habere existimo.

Itaque neque alii alios destruere possunt aut absorbere, quemadmodum finxit Cartesius, cum ostendere vellet quomodo stella aut Sol aliquis vertatur in Planetam. Apparet autem, cùm hæc scriberet, non attendisse eum ad immensam stellarum inter se distantiam; idque vel ex hoc uno, quod, cum primum Cometes aliquis intra vorticem nostrum, cujus centrum Sol occupat, descendit; vult eum nobis visibilem fieri, quod est absurdissimum. Quomodo enim, sidus ejusmodi, quod ex Solis lumine repercusso tantummodo splendet; ut cum plerisque Philosophis ipse statuit; quomodo, inquam, posset conspici à tanto intervallo, quod saltem decies millies contineret illud quod à Terra ad Solem est. Non enim ignorare poterat vastissimum, circa Solem undique extensum, spatium; cum sciret in Copernici systemate orbem magnum, hoc est, orbitam Terræ, velut punctum esse cum illo comparatum. Sed tota hæc de Cometarum, atque etiam de Planetarum, & mundi origine, commentatio apud Cartesium tam levibus rationibus contexta est, ut sæpe mirer tantum operæ in talibus concinnandis figmentis eum impendere potuisse. Mihi magnum quid consecuti videbimur, si quemadmodum sese habeant res, quæ in natura exstant, intellexerimus; à quo longissime etiam

nunc

nunc absumus. Quomodo autem quæque effectæ fuerint, quodque sunt, esse cœperint, id nequaquam humano ingenio excogitari, aut conjecturis attingi posse, existimo.

F I N I S.

CHRISTIANI HUGENII

OPERA MISCELLANEA.

TOMUS QUARTUS.

Tomi quarti contenta.

DE RATIOCINIIS IN LUDO ALEÆ

AUCTORE

CHRISTIANO HUGENIO.

CHRISTIANUS HUGENIUS

Clarissimo Viro,

D. FRANCISCO SCHOTENIO

S. D.

Cum in editione elegantissimorum ingenii tui monumentorum, quam præ manibus nunc habes, Vir Clarissime, id inter cætera te spectare sciam, ut varietate rerum, quarum tractationem instituisti, ostendas quam latè se protendat divina Analytices scientia, facilè intelligo etiam illa plurimùm proposito tuo inservire posse, quæ de aleæ ratiociniis conscripsimus; quantò enim minus rationis terminis comprehendi posse videbantur, quæ fortuita sunt atque incerta, tantò admirabilior ars censebitur, cui ista quoque subjacent. Quare cum in tui gratiam primùm illa exponenda susceperim, túque digna existimes, quæ simul cum subtilissimis tuis inventis in lucem exeant, adeo tibi non refragabor, ut etiam è re mea esse existimem hâc potissimùm ratione ipsa in manus hominum pervenire. Quippe cum in re levi ac frivola operam collocasse videri alioqui possem, non tamen prorsus utilitatis expers ac nullius pretii censebitur, quòd tu veluti inter tua

adoptaveris, nec sine multo labore è vernacula lingua nostra in Latinam converteris. Quanquam, si quis penitiùs ea quæ tradimus examinare cœperit, non dubito quin continuò reperturus sit rem non ut videtur ludicram agi, sed pulchræ subtilissimæque contemplationis fundamenta explicari. Et Problemata quidem quæ in hoc genere proponuntur, nihilo minus profundæ indaginis visum iri confido, quam quæ Diophanti libris continentur, voluptatis autem aliquanto plus habitura, cum non, sicut illa, in nuda numerorum consideratione terminentur. Sciendum verò, quod jam pridem inter præstantissimos totâ Galliâ Geometras calculus hic agitatus fuerit, ne quis indebitam mihi primæ inventionis gloriam hac in re tribuat. Cæterùm illi, difficillimis quibusque quæstionibus se invicem exercere soliti, methodum suam quisque occultam retinuêre, adeò ut a primis elementis universam hanc materiam evolvere mibi necesse fuerit. Quamobrem ignoro etiamnum an eodem mecum principio illi utantur; at in resolvendis Problematis pulchrè nobis convenire sæpenumero expertus sum. Horum Problematum nonnulla in fine operis addidisse me invenies, omissa tamen analysi, cum quod prolixam nimis operam poscebant, si perspicuè omnia exequi voluissem, tum quod relinquendum aliquid videbatur exercitationi nostrorum, si qui erunt, Lectorum. Vale.

Dat. Hagæ Com.
27 Apr. 1657.

DE

DE
RATIOCINIIS
IN
LUDO ALEÆ.

ETsi lusionum, quas sola sors moderatur, incerti solent esse eventus, attamen in his, quanto quis ad vincendum quàm perdendum propior sit, certam semper habet determinationem. Ut si quis primo jactu unâ tesserâ senarium jacere contendat, incertum quidem an vincet; at quantò verisimilius sit eum perdere quàm vincere, reipsâ definitum est, calculóque subducitur. Ita quoque, si cum aliquo certem hâc ratione, ut ternis lusibus constet victoria, atque ego jam unum lusum vicerim, incertum adhuc uter nostrum prior tertii victor sit evasurus. Verùm quanti expectatio mea, & contra quanti illius, æstimari debeat, certissimo ratiocinio consequi licet, atque hinc definire, si ludum uti est imperfectum linquere inter nos convenerit, quantò major portio ejus quod depositum est mihi quàm adversario meo tribuenda esset: vel etiam-si quis in locum sortemque meam succedere cupiat, quo pretio me eam ipsi vendere æquum sit. Atque hinc innumeræ quæstiones exoriri possunt inter duos, tres, pluresve collusores. Cumque minimè vulgaris sit hujusmodi supputatio, & sæpe utiliter adhibeatur, breviter hic quâ ratione aut methodo expedienda sit exponam, ac deinde etiam, quæ ad aleam sive tesseras propriè pertinent, explicabo.

Hoc autem utrobique utar fundamento: nimirum, in aleæ

ludo tanti æstimandam esse cujusque sortem seu expectationem ad aliquid obtinendum, quantum si habeat, possit denuo ad similem sortem sive expectationem pervenire, æquâ conditione certans. Ut, exempli gratiâ, si quis me inscio alterâ manu 3 solidos occultet, alterâ 7 solidos, mihique optionem det ex utra manu solidos accipere malim; hoc tantundem mihi valere dico, ac si 5 solidi mihi dentur. Quoniam quinque solidos habens, denuo eò pervenire possum, ut æquam expectationem nanciscar ad 3 vel 7 solidos obtinendos: idque æquo lusu contendens.

Propositio I.

Si a *vel* b *expectem, quorum utrumvis æquè facile mihi obtingere possit, expectatio mea dicenda est valere* $\frac{a+b}{2}$.

Ad hanc regulam non solùm demonstrandam, verùm etiam primitùs eruendam posito x pro eo quod æquivalet expectationi meæ, oportet me, quum x habeo, rursus ad similem sortem pervenire posse, æquâ conditione certantem. Ponatur itaque lusus esse talis, ut cum altero certem hâc conditione, ut quisque deponat x, ac ut victor victo traditurus sit a. Hic autem lusus justus est, & patet me hâc ratione æquam habere sortem ad obtinendum a, si lusum perdam scilicet; aut $2x-a$, si vincam: tum enim obtineo $2x$, id nempe quod depositum est, de quo alteri erogandum est a. Quòd si autem $2x-a$ tantundem valeret atque b, æqua mihi sors obtingeret ad a quàm ad b. Pono itaque $2x-a \propto b$, & fit $x \propto \frac{a+b}{2}$, pro valore meæ expectationis. Cujus demonstratio facilis est. Etenim habens $\frac{a+b}{2}$ possum cum alio certare, qui etiam $\frac{a+b}{2}$ deponere volet, hâc conditione ut

ut vincens victo sit traditurus a. Quâ ratione similis expectatio mihi obtinget ad obtinendum a, si perdam, aut ad obtinendum b, si vincam; tum enim obtineo $a+b$, id nempe quod depositum est, alterique inde concedo a.

In numeris. Si ad 3 vel 7 æqua sors mihi obtingat, tum expectatio mea per hanc Propositionem valet 5; & certum est me 5 habentem rursus ad eandem expectationem pervenire posse. Si enim cum alio certans 5 deponam, atque ille similiter 5 deponat, hâc conditione, ut, qui vincit, alteri sit daturus 3: erit hic lusus omnino justus, & patet mihi æquam obtingere sortem ad obtinendum 3, si perdam, aut 7, si vincam: quoniam tunc obtineo 10, de quo alteri concedo 3.

PROPOSITIO II.

Si a, b, *vel* c *expectem, quorum unumquodque pari facilitate mihi obtingere possit, expectatio mea æstimanda est* $\frac{a+b+c}{3}$.

AD quod rursus inveniendum, ponatur, ut ante, x pro valore expectationis meæ. Oportet ergo me, cùm x habeo, ad eandem expectationem pervenire posse justo lusu. Ponatur lusus esse talis, ut cum duobus aliis ludam hâc conditione, ut quisque nostrum trium deponat x, & ut cum uno hoc pactum aggrediar, si ipse victor evadat, mihi sit daturus b, & ego ipsi traditurus sim b, si idem mihi obtingat. Cum altero autem hanc ineam conditionem, ut ille ludum vincens mihi traditurus sit c, aut ego ipsi sim daturus c, si ego vincam. Et patet hunc ludum justum esse. Æquam autem hâc ratione sortem habebo ad obtinendum b, si nimirum primus vincat, aut c, si secundus vincat, aut etiam $3x-b-c$ si ego vincam; tunc enim obtineo $3x$, quod depositum est, de quo uni concedo b, & alteri c. Quòd si $3x-b-c$ æquale fuerit ipsi a, eadem mihi obtingeret expe-

pectatio ad obtinendum a, quæ ad b, aut ad c. Pono itaque $3x-b-c \infty a$, & fit $x \infty \frac{a+b+c}{3}$, pro valore meæ expectationis. Eodem modo invenitur, si ad a, b, c, aut d æqua sors mihi obtingat, id tanti valoris esse, quanti $\frac{a+b+c+d}{4}$. Atque ita porrò.

Propositio III.

Si numerus casuum, quibus mihi eveniet a, *sit* p, *numerus autem casuum quibus mihi eveniet* b *sit* q, *sumendo omnes casus æquè in proclivi esse: expectatio mea valebit* $\frac{pa+pq}{p+q}$.

AD hanc regulam eruendam, ponatur rursus x pro valore expectationis meæ: ergo oportet me, cùm x habeo, ad eandem expectationem pervenire posse, ut ante, justo lusu. Ad hoc autem tot collusores sumam, ut unà mecum numerum ipsius $p+q$ efficiant, quorum deponat quisque x, ita ut depositum sit $px+qx$, & quisque sibi ludat æquâ expectatione ad vincendum. Porrò cum tot ex hisce collusoribus, quot indicat numerus q, sigillatim hoc pactum inibo, ut eorum qui vincat mihi sit daturus b, aut ego contra ipsi idem b, si vincam. Similiter cum reliquis collusoribus, constituentibus $p-1$ sigillatim hanc conditionem aggrediar, ut eorum quisque, qui ludum vincit, mihi sit daturus a, & ego tantundem (a scilicet) ipsi, si ego vincam. Et patet hunc lusum hâc conditione justum esse, nemine videlicet injuriam patiente. Deinde patet me nunc q expectationis habere ad b, & $p-1$ expectationes ad a, & 1 expectationem (me nempe vincente) ad $px+qx-bq-ap+a$, tunc enim obtineo $px+qx$, id quod depositum est, de quo tradere debeo b unicuique q lusorum, & a unicuique $p-1$ lusorum, quæ simul conficiunt $bq+pa-a$. Si itaque $qx+bx-bq-ap+a$ æqua-

æquale esset ipsi a, haberem p expectationes ad a, (quandoquidem jam $p-1$ expectationes ad id habebam) & q expectationes ad b, & sic ad priorem meam exspectationem rursus pervenissem. Quocirca porrò $px+qx-bq-ap+a \propto a$, & fit $x \propto \frac{ap+bq}{p+q}$, pro valore expectationis meæ, omnino ut in initio positum fuit.

In numeris. Si 3 mihi expectationes forent ad 13, & 2 expectationes ad 8, haberem per hanc regulam tantundem ac 11. Et facile est ostendere, me, si 11 habeam, rursus ad eandem expectationem pervenire posse. Ludens enim contra 4 alios, & quisque nostrum quinque deponens 11, cum duobus ex illis sigillatim pactum inibo, ut horum qui vincat mihi sit daturus 8, aut ego ipsi idem 8, si vincam. Similiter cum duobus reliquis, ut eorum quisque, qui ludum vincit, mihi sit daturus 13, aut ego ipsi tantundem, si ego vincam. Qui quidem lusus justus est. Et patet me hoc modo duas habere expectationes ad 8, nimirum si alteruter eorum, qui mihi 8 promiserunt, vincat, & 3 expectationes ad 13, nimirum si alteruter reliquorum duorum, qui mihi 13 tradere debent, vincat, aut si ipse ludum vincam: ego enim ludum vincens obtineo depositum, id est, 55, de quo unicuique duorum tradere debeo 13, & unicuique reliquorum duorum 8, ita ut & mihi relinquatur 13.

Propositio IV.

Ut igitur ad primò propositam quæstionem veniamus, nimirum, de facienda distributione inter diversos collusores, quando eorum sortes inæquales sunt, opus est ut a facilioribus incipiamus.

Sumpto itaque me cum aliquo certare, hoc pacto: ut qui priùs ter vicerit, quod depositum est, lucretur, & me jam bis vicisse, alterum verò semel. Scire cupio, si lusum pro-

ſequi non velimus, ſed pecuniam, de qua certamus, prout æquum eſt, partiri, quantum ejus mihi obtingeret.

Primò conſiderare oportet luſus, qui utrobique deficiunt. Certum enim eſt, ſi inter nos convenerit, verbi gratiâ, ut quod depoſitum eſt lucretur is, qui priùs vigeſies vicerit, & ego decies & novies vicero, at alter decies & octies, tantò meliorem fore eo caſu ſortem meam quantò hìc melior eſt, ubi à tribus luſibus binos conſequutus ſum, ille verò unum duntaxat: quia nimirum utrobique mihi unus tantummodo luſus ſed ipſi duo deficiunt.

Porrò ad inveniendum quanta pars utrique debeatur, advertendum eſt quid fieret, ſi in luſu pergeremus. Certum enim eſt, ſi primum ludum vincerem, me præſcriptum numerum impleturum & omne depoſitum conſecuturum, id quod vocetur a. Quod ſi autem alter primum ludum vinceret, tunc æquata utriuſque ſors foret, (quippe utrique uno adhuc deficiente ludo,) adeoque cederet cuique $\frac{1}{2}a$. Manifeſtum autem eſt me æquam habere ſortem ad primum ludum vincendum aut perdendum, ita ut mihi nunc æqua ſit expectatio ad obtinendum a aut $\frac{1}{2}a$: quod ipſum per 1mam Propoſitionem tantum eſt ac ſi utriuſque ſortis dimidium, id eſt, $\frac{3}{4}a$, haberem; & relinquitur alteri meo colluſori $\frac{1}{4}a$, quæ ipſius portio ſtatim ab initio eodem modo reperiri potuiſſet. Unde patet, eum, qui ludum meum in ſe recipere vellet, mihi $\frac{3}{4}a$ pro eo tradere debere; ac proinde ſemper tria contra unum deponere eum poſſe, qui unum ludum vincere contendat, priuſquam alter duos vincat.

Propositio V.

Ponamus unum mihi deficere ludum & colluſori meo tres luſus. Oportet hìc facere diſtributionem.

ADvertamus itaque rurſus, in quo eſſemus ſtatu, ſi ego vel ipſe primum vinceret luſum. Si ego vincerem, obtinerem depoſitum, id eſt, a; quòd ſi autem ille primum ludum vin-

ce-

ceret, deficerent ipſi duo luſus & mihi unus; ac proinde in eodem ſtatu eſſemus, qui in præcedenti Propoſitione poſitus fuit, mihique obtingeret $\frac{3}{4}a$, ut ibi oſtenſum eſt. Itaque pari facilitate vel a mihi obtinget vel $\frac{3}{4}a$, id quod tantum eſt, per 1^mam^ Propoſitionem, ac $\frac{7}{8}a$. Et relinquitur $\frac{1}{8}a$ colluſori meo; ita ut mea ſors ad ſortem illius ſe habeat, ſic ut 7 ad 1.

Quemadmodum autem ad hunc calculum requiſitus eſt præcedens, ita rurſus hicce inſervit ſequenti: nimirum, ſi ponamus mihi unum ludum deficere & colluſori meo 4^or^ luſus. Et invenitur eodem modo, mihi deberi $\frac{15}{16}$ iſtius quod depoſitum eſt, & ipſi $\frac{1}{16}$.

PROPOSITIO VI.

Ponamus mihi deficere duos luſus & colluſori meo tres luſus.

Fiet itaque primo luſu; vel ut mihi unus luſus deficiat & ipſi tres (unde mihi per præcedentem Propoſitionem obtinget $\frac{7}{8}a$); vel ut cuique noſtrum adhuc duo luſus deficiant, unde mihi debebitur $\frac{1}{2}a$, quandoquidem ſic utrique æqua ſors futura eſt. Eſt mihi autem æqualis facilitas ad primum ludum vincendum aut perdendum; ita ut mihi æqua ſit expectatio ad obtinendum $\frac{7}{8}a$ aut $\frac{1}{2}a$, id quod mihi valet $\frac{11}{16}a$, per 1^mam^ Propoſitionem. Et debentur mihi 11 partes ejus quod depoſitum eſt, & colluſori meo 5 partes.

PROPOSITIO VII.

Ponamus mihi deficere duos luſus & colluſori meo quatuor.

Fiet itaque, ut, ſi primum ludum vincam, unum ludum vincere debeam & alter quatuor; vel, ſi eundem perdam, duos & alter tres. Ita ut æqua mihi ſors obtingat ad $\frac{15}{16}a$

 aut

aut $\frac{11}{16}a$, id quod tantum valet ac $\frac{27}{32}a$, per 1^mam Propositionem. Unde patet, eum meliorem habere sortem, qui duos lusus vincere debet dum alter quatuor, quàm eum, qui unum dum alter duos. In hoc enim posteriori casu, nimirum ipsius 1 ad 2, portio mea, per 4^tam Propositionem, est $\frac{3}{4}a$, quæ minor est quàm $\frac{27}{32}a$.

Propositio VIII.

Nunc verò ponamus tres esse collusores, quorum primo ut & secundo unus lusus deficiat, sed tertio duo lusus.

UT igitur inveniatur primi pars, rursus advertendum est, quid ipsi deberetur, si vel ipse vel alter reliquorum duorum primum lusum vinceret. Si ipse vinceret, haberet depositum, id quod sit a. Quòd si secundus vinceret, primus nihil haberet, quoniam secundus sic lusui finem imposuisset. At si tertius vinceret, tunc cuique trium adhuc unus deficeret lusus, ideóque tam primo quàm utrique reliquorum deberetur $\frac{1}{3}a$. Et sit primo una expectatio ad a, una ad o, & una ad $\frac{1}{3}a$, (quandoquidem æquè facilè contingere potest cuique trium ut primum ludum vincat,) quod ipsi tantundem valet ac $\frac{4}{9}a$, per 2^dam Propositionem. Et sit similiter secundo $\frac{4}{9}a$, & remanet tertio $\frac{1}{9}a$. Cujus pars separatim etiam inveniri potuerat, atque inde reliquorum partes determinari.

Pro-

Propositio IX.

Ut tot collusorum, quot quis voluerit, ex quibus uni plures & alii pauciores lusus deficiunt, cujusque pars inveniatur, considerandum est, quid illi, cujus partem invenire volumus, deberetur, si vel ipse, vel quislibet reliquorum primum sequentem ludum vinceret. Horum autem partes si in unam summam colligantur, & aggregatum per numerum collusorum dividatur, quotiens ostendet unius quæsitam partem.

Ponamus tres esse collusores A, B, & C, & ipsi A unum ludum deficere, ipsi B duos lusus, & ipsi C similiter duos lusus Invenire oportet, quid ipsi B, ejus quod depositum est, debeatur. Id quod vocetur q.

Primò examinandum est, quid ipsi B deberetur, si vel ipse, vel A, vel C primum sequentem ludum vinceret.

Si A vinceret, ludo finem imposuisset, ac per consequens ipsi B deberetur o. Si ipse B vinceret, deficeret illi adhuc unus lusus, & ipsi A unus lusus, at ipsi C duo lusus. Quocirca ipsi B hoc in casu deberetur $\frac{4}{9}q$, per 8vam Propositionem.

Denique si C primum sequentem ludum vinceret, tunc ipsis A & C singulis unus deficeret lusus, sed ipsi B duo lusus, ac per consequens ipsi B deberetur $\frac{1}{9}q$, per eandem Propositionem 8vam. Nunc autem in unam summam colligendum est, id quod in tribus hisce casibus ipsi B deberetur: nimirum, o, $\frac{4}{9}q$, $\frac{1}{9}q$: quorum summa est $\frac{5}{9}q$. Quod ipsum divisum per 3, numerum collusorum, dat $\frac{5}{27}q$ Quæ ipsius B quæsita pars est. Demonstratio autem hujus patet ex 2da Propositione. Quoniam enim B æquam habet sortem ad obtinendum o, $\frac{4}{9}q$, vel $\frac{1}{9}q$, habet per 2dam Propositionem tantundem ac

quotâ vice duos ſenarios duabus teſſeris, aut tres ſenarios tribus teſſeris jacere ſit tentandum. Et plures aliæ hujuſmodi quæſtiones. Ad quas ſolvendas advertendum eſt.

Primò unius teſſeræ ſex eſſe jactus diverſos, quorum quivis æquè facilè eveniat. Sumo enim teſſeram habere figuram cubi perfectam.

Porrò duarum teſſerarum 36 eſſe diverſos jactus, quorum ſimiliter quivis æquè facilè obtingere poteſt. Nam ratione cujuſque jactus unius teſſeræ poteſt unus ſex jactuum alterius teſſeræ ſimul contingere. Et ſexies 6 efficiunt 36 jactus.

Item trium teſſerarum eſſe 216 jactus diverſos. Nam ratione cujuſque 36 jactuum duarum teſſerarum poteſt unus ſex jactuum, qui in 3[tia] ſunt, evenire. Et ſexies 36 efficiunt 216 jactus.

Eodem modo patet, quatuor teſſerarum jactus eſſe ſexies 216, id eſt, 1296; atque ſic ulteriùs jactus quotlibet teſſerarum ſupputari poſſe, ſumendo ſemper pro acceſſione unius teſſeræ ſexies jactus præcedentis.

Porrò notandum, duarum teſſerarum unum duntaxat eſſe jactum, qui 2 aut 12 puncta efficiat, duos verò jactus, qui 3 aut 11 puncta efficiant. Si enim teſſeras vocemus A & B, patet, ad 3 puncta jacienda in A unum & in B duo, vel in B unum & in A duo puncta reperiri poſſe. Similiter ad 11 puncta jacienda in A quinque & in B ſex, vel in A ſex & in B quinque puncta patêre poſſe. Quatuor punctorum tres ſunt jactus, videlicet, ipſius A 1 & B 3 puncta; vel ipſius A 3 & B 1 punctum; vel ipſius A 2 & B 2 puncta.

Decem punctorum ſimiliter tres ſunt jactus.

Quinque vel novem punctorum 4[or] ſunt jactus.

Sex vel octo punctorum 5[que] ſunt jactus.

Septem punctorum 6 ſunt jactus.

In tribus teſſeris reperiuntur	3 vel 18	punctorum	1	jactus.
	4 vel 17		3	
	5 vel 16		6	
	6 vel 15		10	
	7 vel 14		15	
	8 vel 13		21	
	9 vel 12		25	
	10 vel 11		27	

PRO-

Propositio X.

Invenire, quot vicibus suscipere quis possit, ut unâ tesserâ 6 puncta jaciat.

Si quis primâ vice senarium jacere contendat, apparet unum esse casum, quo vincat, habeatque id, quod pignoris loco depositum est; quinque verò esse casus, quibus perdat, & nihil habeat. Sunt enim 5 jactus contra ipsum, & tantùm unus pro ipso. Quod autem depositum est vocetur *a*. Est itaque ipsi unica expectatio ad obtinendum *a*, sed quinque ad obtinendum o; id quod per 2dam Propositionem tantundem valet ac $\frac{1}{6}a$. Et manet pro eo qui ipsi hunc casum offert $\frac{5}{6}a$. Ita ut tantummodo 1 contra 5 deponere possit, qui primâ vice suscipere velit.

Qui duabus vicibus semel senarium jacere certet, sors ejus hoc pacto computatur. Si primâ vice 6 jaciat, obtinet *a*. Si diversum eveniat, unus ipsi restat jactus, qui ex præcedenti tantum valet, quantum $\frac{1}{6}a$. Atqui ut primâ vice 6 jaciat, unus tantùm casus est, & quinque casus, quibus diversum eveniat. Itaque ab initio unus casus est, qui det ipsi *a*, & quinque qui dent $\frac{1}{6}a$, id quod per 2dam Propositionem valet $\frac{11}{36}a$. Unde contracertanti lusori cedit reliquum $\frac{25}{36}a$; adeo ut sors utriusque sive æstimatio expectationis eam servet rationem, quam 11 ad 25; id est minus quàm 1 ad 2.

Hinc eodem modo calculo subducitur, quòd sors ejus, qui tribus vicibus semel senarium jacere suscipit, sit futura $\frac{91}{216}a$; ita ut 91 contra 125 deponere possit; id est, paulò minus quàm 3 ad 4.

Qui quatuor vicibus idem suscipit, sors ejus est $\frac{671}{1296}a$; ita ut 671 contra 625 deponere possit; id est, plùs quam 1 ad 1.

Qui quinque vicibus idem suscipit, sors ejus est $\frac{4651}{7776}a$, & potest 4651 contra 3125 deponere; id est, paulò minus quàm 3 ad 2.

Qui

Qui sex vicibus idem suscipit, sors ejus est $\frac{31031}{46656}a$, & potest 31031 contra 15625 deponere; id est, paulò minus quàm 2 ad 1.

Atque ita consequenter quilibet jactuum numerus inueniri potest. Sed licet majori compendio progredi, ut in sequenti Propositione ostendetur; sine quo calculus alias multò prolixior foret.

PROPOSITIO XI.

Invenire, quot vicibus suscipere quis possit, ut duabus tesseris 12 puncta jaciat.

SI quis primâ vice duos senarios jacere contendat, apparet unum esse casum, quo vincat, id est, ad obtinendum a; & 35 esse casus, quibus perdat sive nihil habeat, quoniam 36 sunt jactus. Itaque habet, per 2dam Propositionem, $\frac{1}{36}a$.

Qui duabus vicibus idem suscipit, si primâ vice duos senarios jaciat, obtinebit a; si verò primâ vice diversum eveniat, unus ipsi restat jactus, id quod ipsi, per illud quod jam dictum est, valet $\frac{1}{36}a$.

Atqui ut primâ vice duos senarios jaciat, unus tantum est casus, sed 35 casus, quibus diversum eveniat. Itaque ab initio unus casus est, qui det ipsi a, & 35 qui dent $\frac{1}{36}a$; id quod per 2dam Propositionem valet $\frac{71}{1296}a$. Et remanet contracertanti $\frac{1225}{1296}a$.

Ex his invenire licet, qualis sit ei sors aut pars, qui idem suscipit quaternis jactibus, prætereundo casum eum, cùm quis illud ternis jactibus suscipit.

Etenim, qui 4or vicibus duos senarios jacere contendit, si illud 1ma aut 2da vice faciat, obtinet a; sin minùs, restant ipsi duo jactus, qui per illud quod superiùs dictum est, valent $\frac{71}{1296}a$. Sed propter eandem ratio-

tionem habet etiam 71 casus, ut ex duobus primis jactibus semel duos senarios jaciat, contra 1225 casus, quibus diversum eveniat. Habet itaque ab initio 71 casus, qui ipsi dent a, & 1225 casus, qui dent ipsi $\frac{71}{1296}a$. Quod ipsi per 2dam Propositionem valet $\frac{178991}{1679616}a$. Et remanet contracertanti $\frac{1500625}{1679616}a$. Id quod ostendit eorum sortes esse ad se invicem, ut 178991 ad 1500625.

E quibus porrò eâdem ratione invenitur expectatio ejus, qui 8 vicibus semel duos senarios jacere certat. Ac inde rursus expectatio ejus, qui idem suscipit 16 vicibus. Atque ex hujus expectatione, ut etiam ex expectatione illius, qui istud 8 vicibus suscipit, invenitur expectatio ejus, qui illud 24 vicibus in se recipit. In qua operatione, quoniam præcipuè quæritur in quo numero jactuum æqualis sors incipiat, inter eum qui id suscipit & eum qui offert, licebit à numeris, qui alioquin in immensum excrescerent, posteriores aliquot characteres auferre. Atque ita quidem reperio ei, qui illud 24 vicibus suscipit, adhuc aliquid deficere; tumque demum eum potiorem conditionem inire, cùm 25 jactibus aggreditur.

Propositio XII.

Invenire quot tesseris suscipere quis possit, ut primâ vice duos senarios jaciat.

Hoc autem tantundem est, ac si quis scire velit, quoto jactu quispiam unâ tesserâ suscipere possit, ut bis senarium jaciat. Quòd si quis duobus jactibus susciperet, obtingeret ei, per ea quæ ante ostensa sunt, $\frac{1}{36}a$. Qui illud tribus jactibus in se reciperet, si primus ejus jactus senarius non foret, haberet adhuc duos jactus, quorum uterque senarius esse deberet, id quod tantundem

dem valere dictum est ac $\frac{1}{36}a$. At verò primo ejus jactu existente senario, opùs est ut ex duobus jactibus non nisi semel senarium jaciat. Quod per 10 Propositionem tantundem valet ac si $\frac{11}{36}a$ haberet. Atqui certum est ipsum unum habere casum, quo primâ vice senarium jaciat, & quinque casus quibus diversum eveniat. Habet itaque ab initio unum casum ad $\frac{11}{36}a$, & 5 casus ad $\frac{1}{36}a$, id quod per 2dam Propositionem tantundem valet ac $\frac{16}{216}a$ seu $\frac{2}{27}a$. Hoc pacto assumendo continuè unum jactum ampliùs, invenitur 10 jactibus unâ tesserâ, aut 10 tesseris primo jactu suscipi posse, ut duo senarii jaciantur, idque cum lucro.

PROPOSITIO XIII.

Si cum alio ludam duabus tesseris unum solummodo jactum, hâc conditione, ut, si septenarius eveniat, ego vincam; at ille, si denarius obtingat; si vero quidquam aliud accidat, ut tum id quod depositum est æqualiter dividamus: Invenire qualis istius pars cuique nostrum debeatur.

Quoniam 36 jactuum, qui duabus tesseris proveniunt, 6 jactus existunt septem punctorum, & 3 jactus decem punctorum, restant adhuc 27 jactus, qui ludum æquare possunt; id quod si fiat, cuique nostrum debebitur $\frac{1}{2}a$. Verùm si id non obtingat, habebo 6 casus, quibus vincam, id est, ut a habeam; & 3 casus, quibus diversum eveniat, nihilque habeam: id quod per 2dam Propositionem tantundem est ac si tali casu $\frac{2}{3}a$ haberem. Habeo itaque ab initio 27 casus ad $\frac{1}{2}a$ & 9 casus ad $\frac{2}{3}a$, id quod, per 2dam Propositionem, tantundem est ac $\frac{13}{24}a$. Et remanet contracertanti $\frac{11}{24}a$.

PROPOSITIO XIV.

Si ego & alius duabus tesseris alternatim jaciamus, hâc conditione, ut ego vincam simul atque septenarium jaciam, ille vero quam primùm senarium jaciat; ita videlicet, ut ipsi primum jactum concedam: invenire rationem meæ ad ipsius sortem.

POnatur, sortem meam valere x, & id quod depositum est vocari a; eritque sors alterius $\infty\ a-x$. Et patet, quandocunque ipsius vices jaciendi revertuntur, sortem meam tum rursus debere esse $\infty\ x$. At quandocunque meæ vices sunt ut jaciam, sors mea pluris æstimanda est. Ponatur itaque pro ejus valore y. Jam quo niam ex 36 jactibus reperiuntur 5 in 2 tesseris, qui collusori meo senarium dare lusuſque victorem reddere possunt; & 31 jactus, quibus diversum eveniat, id est, qui meas jaciendi vices promovent: habebo, priusquam jacit, 5 casus ad obtinendum o, & 31 casus ad obtinendum y. id quod per 3tiam Propositionem valet $\frac{31\,y}{36}$. Posuimus autem casum meum à principio esse $\infty\ x$. Quocirca erit $\frac{31\,y}{36}\ \infty\ x$, adeoque $y\ \infty\ \frac{36\,x}{31}$. Deinde positum fuit, vicibus meis venientibus; sortem meam valere y. Ego verò jacturus, habeo 6 casus ad obtinendum a, quandoquidem 6 jactus reperiuntur 7 punctorum, qui me victorem reddunt; habeoque 30 casus, quibus vices collusoris mei revertuntur, id est, ut mihi obtineam x. id quod per 3tiam Pro-

Propoſitionem valet $\frac{6a + 30x}{36}$. Hoc autem cum ſit $\infty\, y$, erit, invento, ut ante, $\frac{36x}{31} \infty\, y$, $\frac{30x + 6a}{36} \infty \frac{36x}{31}$. Unde invenitur $x \infty \frac{31a}{61}$, valor meæ ſortis. Et per conſequens colluſoris mei erit $\frac{30a}{61}$; ita ut ratio ſortis meæ ad illius ſortem ſit, ut 31 ad 30.

Coronidis loco ſubjungantur ſequentia Problemata.

PROBLEMA I.

A & B unà ludunt duabus teſſeris, hâc conditione, ut A vincat, ſi ſenarium jaciat, at B ſi ſeptenarium jaciat. A primò unum jactum inſtituet; deinde B duos jactus conſequenter; tum rurſus A duos jactus, atque ſic deinceps, donec hic vel ille victor evadat. Quæritur ratio ſortis ipſius A ad ſortem ipſius B? Reſp. ut 10355 ad 12276.

PROBLEMA II.

Tres colluſores A, B & C aſſumentes 12 calculos, quorum 4 albi & 8 nigri exiſtunt, ludunt hâc conditione: ut, qui primus ipſorum velatis oculis album calculum elegerit, vincat; & ut prima electio ſit penes A, ſecunda penes B, & tertia penes C, & tum ſequens rurſus penes A, atque ſic deinceps alternatim. Quæritur, quænam futura ſit ratio illorum ſortium?

PROBLEMA III.

A certat cum B quòd ipſe ex 40 chartis luſoriis, id eſt, 10 cujuſque ſpeciei, 4 chartas extracturus ſit; ita

ut ex unaquaque specie habeat unam. Et invenitur ratio sortis A ad sortem B ut 1000 ad 8139.

Problema IV.

Assumptis, ut ante, 12 calculis, 4 albis & 8 nigris, certat A cum B, quòd velatis oculis 7 calculos ex iis exempturus sit, inter quos 3 albi erunt. Quæritur ratio sortis ipsius A ad sortem ipsius B.

Problema V.

A & B assumentes singuli 12 nummos ludunt tribus tesseris hâc conditione: ut, si 11 puncta jaciantur, A tradat nummum ipsi B; at si 14 puncta jaciantur, B tradat nummum ipsi A; & ut ille ludum victurus sit, qui primùm omnes habuerit nummos. Et invenitur ratio sortis ipsius A ad sortem ipsius B, ut 244140625 ad 282429536481.

FINIS.

CHRISTIANI HUGENII

NOVUS CYCLUS

HARMONICUS.

CHRISTIANI HUGENII NOVUS CYCLUS HARMONICUS.

Litteræ D. Hugenii de Cyclo Harmonico.

NOvam tibi mitto de Musica observationem. Spectat hæc prima Scientiæ illius fundamenta, id est, tonorum, qui in cantu & Instrumentorum fabrica observantur, determinationem. Quicunque licet parum versati sint in parte illa Theoriæ, norunt, quid sit, quod vocatur Temperamentum, quod tonos illos moderatur & quam necessarium illud sit in harmonia tuborum Organi vel chordarum Clavecymbali.

Celebriores auctores, uti Zarlinus & Salinas, illud referunt inter inventa pulcherrima & utilissima, quæ in musicis detegi possunt; & uterque contendit se primum Temperamentum hoc ad examen revocasse, & demonstrationibus Mathematicis constituisse. Ante illos experientia & necessitas illud quidem aliquo modo jam introduxerant, licet vera mensura & methodus nondum esset cognitæ. Inventio hujus Temperamenti in causa fuit, ut merito negligerentur omnes veterum Tetrachordarum & Diapasonorum divisiones quarum pleræquæ absurdæ & usus nullius erant in compositione plurimarum partium: hac etiam inventione nostrum systema tonorum magis abundat consonantiis, magisque est juxta naturam cantus, quam illorum erat.

 Pono

Pono notas esse proportiones, in quibus consistunt perfectæ consonantiæ, scilicet: Quintam audiri, quando, post sonum editum ex motu chordæ integræ, duæ tertiæ partes ipsius agitantur: vel proportionem, a qua consonantia hæc pendet, esse ut 3 ad 2; Quartæ proportionem esse ut 4 ad 3; Tertiæ majoris ut 5 ad 4; Tertiæ minoris ut 6 ad 5; Sextæ majoris ut 5 ad 3; Sextæ minoris ut 8 ad 5. Et quantum ad Temperamentum, iidem autores, quos modo memoravi, nos docent, ut hoc applicetur instrumentis, consonantiam Quintam minuendam esse quarta parte *Commatis* ut vocant, quæ adeo exigua est diminutio, ut auris hanc difficulter percipiat, & nullam inde capiat molestiam; cum *Comma* integrum sit ratio inter tonum integræ chordæ, & hujus tonum quando parte $\frac{1}{81}$ minuitur. Sequitur inde, Quartam auctam esse hac ipsâ exigua quantitate. Tertia minor pariter, est diminuta $\frac{1}{4}$ Commatis, & consequenter Sexta major in tantum aucta; sed Tertia major perfectionem servat, ut & ideo etiam Sexta minor.

Juxta has consonantiarum mensuras, disponuntur omnes instrumentorum toni, tam Diatonici quam Chromatici, quos addidere Musici, & pariter toni Enarmonici, quando & hi ut magis completa sit symphonia adjiciuntur.

Observatio autem nostra hæc est, si dividatur Octava in 31 partes æquales, quod fiet quærendo 30 medias proportionales inter totam chordam (quæ sumitur pro regula Harmonicâ) & ejus dimidium, dabitur in tonis, quos producunt longitudines hæ, Systema parum admodum ab isto quod modo memoravi ex Temperamento deductum, ita ut nemo auri quantumvis subtili præditus differentiam percipiet; quod tamen novum Systema toto cælo ab alio differet, novasque afferet utilitates tum in Theoriam cum in Praxin.

Salinas inventum hoc dividendi octavam in 31 partes æquales memorat sed ut hoc culpet, & P. Mersennus pariter post ipsum hanc rejicit divisionem, unde mihi facile fides habenda erit, me nihil ex illis autoribus mutuatum esse; sed si & hoc fecissem, satis a me præstitum crederem, si præstantiam

tiam ejus divisionis ex Geometriæ principiis demonstraverim, & illam vindicaverim adversus injustum duorum illorum celebrium Scriptorum pronunciatum.

In lib. 3. Musices Salinæ integrum exstat caput de hac divisione, cujus inscriptio est, *De prava constitutione cujusdam instrumenti, quod in Italia citra quadraginta annos fabricari cæptum est, in quo reperitur omnis tonus in partes quinque divisus;* Dicit instrumentum hoc nominis Archicymbali donatum fuisse, illudque fuisse *incerti autoris*; Musicos quosdam admodum idoneos id magni fecisse, præcipue quia continebat omnia intervalla, omnesque consonantias (ut credebant, ait) adscendendo, & descendendo & quia post certam periodum rediebatur ad eundem sonum vel æquipollentem, cum eo a quo initium factum erat; Quia Octava divisa erat in 31 partes æquales, quas vocabant Diesas (seu tonos perfectos) quarum tonus debebat continere 5; magnus semitonus 3; parvus 2; Tertia major 10; Tertia minor 8; Quarta 13; Quinta 18; Sexta minor 21; Sexta major 23. Sed addit, cum tentassent tale disponere instrumentum hoc sonum dedisse admodum ingratum, & qui insigniter aures præsentium offendebat, unde concludit, talem divisionem deviare ab omni ratione harmonica, sive examinetur secundum mensuram justarum consonantiarum sive Temperamenti. Præter experientiam & aliud affert argumentum deductum ex Methodo in hac divisione adhibita. P. Mersennus etiam contendit se bene illam refutavisse. Erravit uterque, quia illos latebat Methodus dividendi Octavam in 31 partes æquales, quod probabiliter & ipsi inventores non potuere; requiritur enim cognitio Logarithmorum, qui nondum illorum nequidem Salinæ tempore erant inventi. Tandem novum hoc Temperamentum, quod adeo repudiant, omnium præstantissimum merito dicitur, omnia habens commoda quæ ipsi tribuebantur; præcipuæ simplicitatem quam communicat Theoriæ tonorum, & parum admodum differt ab eo, quo utuntur omnes, ut auris differentiam non percipiat uti computatione probabo.

Dico ergo primum, Quintam nostræ divisionis non superare Quintas Temperamenti quam $\frac{1}{110}$ Commatis, quæ differentia, auditu nullo modo percipi potest; sed quæ alioquin daret istam consonantiam tanto magis perfectam.

Quartæ consequenter Temperamenti ordinarii non excedunt nostras nisi illâ $\frac{1}{110}$ commatis, & hæ tendunt etiam tanto magis ad perfectionem.

Tertiæ minores sunt minores $\frac{3}{113}$ vel circiter $\frac{1}{37}$ Commatis quàm in temperamento, & Sextæ majores in tantum excedunt Sextas majores Temperamenti; utræque fateor recedunt à perfecta proportione; sed videmus differentiam $\frac{1}{37}$ Commatis non esse sensibilem, nec augere sensibiliter $\frac{1}{4}$ Commatis, qua consonantiæ in Temperamento aberrant à veris.

Tandem Tertiæ majores superant Tertias Temperamenti, quæ sunt perfectæ, $\frac{4}{113}$ vel quasi $\frac{1}{28}$ Commatis, quæ adeo exigua est differentia, ut nisi pro perfectis, non obstante hoc augmento haberi queant; quid enim facit $\frac{1}{28}$ Commatis, cum $\frac{1}{4}$ adeo facile patiamur.

Deducimus ex exiguis omnibus hisce differentiis, Organum aut Clavecymbalum constitutum juxta Temperamentum ordinarium, etiam dispositum esse juxta novam divisionem, quantum aure poterit discerni. Si vero quis sibi hac in parte magis desiderat satisfacere, & exactissime constituere instrumentum juxta 31 partes æquales Octavæ, tantum dividenda est monochorda juxta numeros, qui habentur in sequenti Tabula, &, positâ totâ chordâ, æquisonâ cum C Clavecymbali aut Organi, disponere pariter alias chordas vel tubos, cum sonis, ex memorata divisione oriundis & qui audiuntur posito pectine in locis notatis. Quod vero ad Archicymbalum de quo Salinas loquitur, spectat, dubito, an non habuerit 31 palmulas in quavis octava; sed quoniam non poterit sine confusione talis abacus adhiberi præ multitudine palmularum, præstaret meâ sententiâ disponere 31 chordas simplices pro quavis octavâ, quod potest fieri sine difficultate; & constructis palmulis, quæ elevant subsilia, omnibus æqualis longitudinis, altitudinis, & latitu-

titudinis, quæ latitudo sit ; palmulæ vulgaris, deinde superimponendus erit abacus mobilis, cum claviculis in inferiori parte singularum palmularum fixis; semel ita dispositi hi ut chordæ, quæ in quavis octava adhibentur, sonent, omnibus transpositionibus inservient. Quæ ergo fient sine labore per tonos, semitonos, & usque ad quintas partes tonorum; & certum est, omnes tonos & consonantias in singulis transpositionibus æque accuratas esse, quod utile & amœnum erit. Olim Parisiis construi curavi, tales abacos mobiles superimponendos abacis vulgaribus Clavecymbalorum transpositionibus plurimis, licet non omnibus completis, inservientes; quod inventum approbarunt & imitati sunt periti in musicis varii.

Sed ut quis certus sit de veritate illorum, quæ superius dixi, inspiciat Tabulam sequentem cujus contenta ut & usum explicabo.

Divisio Octavæ in partes 31. æquales.				*Divisio Octavæ secundum Temperamentum vulgare.*	
I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
N 97106450					
4,6989700043	50000	Ut^{2}	C^{2}	50000	4,6989700043
4,7086806493	51131				
4,7183912943	52278				
4,7281019393	53469	Si	B$^{\times}$	53499	4,7283474859
4,7378125843	54678				
4,7475232293	55914	Sa	B	55902	4,7474250108
4,7572338743	57179	*	*	57243	4,7577249674
4,7669445193	58471				
4,7766551643	59794	La	A	59814	4,7768024924
4,7863658093	61146				
4,7960764543	62528	*	*	62500	4,7958800173
4,8057870993	63942	Sol$^{\times}$	G$^{\times}$	64000	4,8061799740
4,8154977443	65388				
4,8252083893	66866	Sol	G	66874	4,8252574989
4,8349190343	68378				
4,8446296793	69924				
4,8543403243	71506	Fa$^{\times}$	F$^{\times}$	71554	4,8546349804
4,8640509693	73122				
4,8737616143	74776	Fa	F	74767	4,8737125054
4,8834722593	76467				
4,8931829043	78196				
4,9028935493	79964	Mi	E	80000	4,9030899870
4,9126041943	81772				
4,9223148393	83621	Ma	E^{b}	83592	4,9221675119
4,9320254843	85512	*	*	85599	4,9324674685
4,9417361293	87445				
4,9514467743	89422	Re	D	89443	4,9515449935
4,9611574193	91444				
4,9708680643	93512	*	*	93459	4,9706225184
4,9805787093	95627	Ut$^{\times}$	C$^{\times}$	95702	4,9809224750
4,9902893543	97789				
4,9999999993	100000	Ut	C	100000	5,0000000000

Tabulæ Explicatio.

Secunda columna continet numeros qui exprimunt longitudines Chordarum; quibus habentur 31 intervalla æqualia secundum novam divisionem; Chorda tota continet partes 100000 & 50000 ejus dimidium dant Octavam.

A latere in 3ª. columna sunt syllabæ, quæ nobis in cantu inserviunt, & * pro quibusdam chordis enarmonicis, quarum prope sol^x est maxime necessaria.

In 4ª. columna sunt litteræ quæ ordinario inserviunt ad designandos tonos.

Numeri 2æ. columnæ ope numerorum col. 1æ. detecti fuere, hi sunt illorum logarithmi respectivi; ad quos habendos divisi logarithmum numeri 2. qui est 0, 30102999566 per 31. unde venit numerus N. 97106450, quem addidi continuo Logarithmo num. 50000, qui est 4. 6989700043. & hisce additionibus detegimus omnes Logarithmos hujus columnæ usque ad maximum 4, 9999999993, qui parum deficiens a 5, 0000000000, (in cujus locum substitui potest) demonstrat bene subductum calculum. Qui Logarithmos intelligunt norunt ita ineundam computationem, si quærantur 30 numeri proportionales inter 100000 & 50000.

5a. columna continet in numeris longitudines chordarum juxta Temperamentum ordinarium, & in 6a. columna sunt eorum numerorum Logarithmi.

Possem explicare quomodo eos supputaverim, & pariter, quomodo id Temperamentum posset detegi, si nondum esset repertum; sed id foret nimis longum, & sufficiet, demonstrare methodum examinandi, & numerorum ἀκρίβειαν, & omnia quæ dixi de nova divisione & de ratione quam habet cum Temperamento.

Ponamus, determinandum esse, an Quinta *Ut, Sol*, temperamenti vulgaris, minor sit ¼ Commatis, quam vera Quinta, cujus ratio est trium ad duo. A log. *Ut*, qui est 5, 0000000000. substraho log. *Sol* qui est 4, 8252574989, id, quod restat

0,

0, 1747425011, exhibet quantitatem Quintæ Temperamenti.

Pariter differentia Logarithmorum 3 & 2 quæ in tabulis Logarithmorum habetur 1760912594, exhibet quantitatem Quintæ perfectæ; hinc substraho Quintam Temperamenti inventi & restat 13487583; id quod debet dare Log. $\frac{1}{4}$ Commatis; & hoc verum est; nam log. Commatis toni id est differentia logar. 81 & 80 est 53950319, cujus Quarta pars est 13487580. Si velimus examinare an Quævis Quinta novæ divisionis ut *Re*, *La*, differat a vera $\frac{1}{4}$ minus $\frac{1}{110}$ Commatis; debemus a Log. *Re*, qui est 4,9514467743, substrahere Log. *La*, qui est 4,7766551643, restat 1747916100, quem subtraho a Logarithmo veræ Quintæ qui erat 1760912594, restat 12996494, qui minor est Log. Quartæ partis Commatis, scilicet 13487580; a quo igitur eum subtraho & restat 491086: Debemus nunc videre, quam partem Commatis hoc faciat; idcirco divido Log. Commatis, scilicet 53950319 per 491086, quotiens est fere $\frac{1}{110}$. Ita ut pateat, nostram Quintam non superari $\frac{1}{4}$ Commatis a Quinta perfecta, sed $\frac{1}{110}$ Commatis deesse. Eodem modo potest examinari quidquid spectat Temperamentum; nihil enim in computationibus Musicis instituendis Logarithmorum usui anteponendum.

F I N I S.

CHRISTIANI HUGENII
VARIA
DE
OPTICA.

CHRISTIANI HUGENII
VARIA
DE
OPTICA.

I.

Excerpta ex literis Dni Hugenii, Academiæ Regiæ Scientiarum Socii, ad Autorem Diarii Eruditorum de Catoptrico conſpicillo Dni Newtoni.

VT deſideras tibi ſententiam meam exponam de Teleſcopio Dni Newtoni. Licet nondum viderim hujus inventi effectum, illud me poſſe aſſerere perſuaſum habeo, pulcrum & ingenioſum eſſe, proſperumque eventum ſortiturum; ſi modo ad ſpecula cava formanda detegi queat, de quo minime deſperandum puto, materia quæ poliri poſſit, ut vivide radios reflectat, ut vitrum. Commoda hujus conſpicilli præ illis, in quibus vitra tantum adhibentur, ſunt, primo quod ſpeculum cavum, licet Sphæricum, multo melius colligat radios parallelos in unum punctum, quam noſtra vitra Sphærica, uti Geometrice poteſt demonſtrari. Unde ſequitur duorum conſpicillorum ejuſdem longitudinis, quorum unum erit novæ illius inventionis, alterum ordinario vitro objectivo inſtructum, primum, magnam habens aperturam, majori copia collecturum radios ab objectis procedentes, licet parvum ſpeculum quoſdam inter-

cipiat, ideoque magis poterit amplificare objecta, quam alterum. Adeo ut Telescopium novum dimidiæ aut tertiæ partis longitudinis conspicilli ordinarii, aut forte etiam minus, æqualem effectum cum hoc præstabit.

Secunda utilitas est, hoc invento vitari incommodum, quod a vitris objectivis separari nequit, mutua nempe duarum superficierum ad se inclinatio. Nam licet hæc parva sit, tamen obest radiis, qui vitra ad latera transeunt & magis oberit, si vellemus uti vitris hyperbolicis vel ellipticis quibus majores concedendæ forent aperturæ.

Tertiam utilitatem censeo, reflexione Speculi metallici non perire tot radios quot in vitris, quæ in utraque superficie reflectunt notabilem radiorum quantitatem & multos intercipiunt obscuritate suæ materiæ.

Cum præterea difficulter admodum vitrum detegatur quod longioribus conspicillis inserviri queat, quia sæpe non ubique homogeneum est, quartum novi Telescopii commodum erit, in metallo nil præter superficiei perfectionem requiri.

Qui viderunt conspicillum D^ni^ Newtoni, observarunt, illud aliquâ difficultate dirigi ad objecta; sed huic malo occurri potest satis facile, jungendo huic conspicillo alterum exacte parallelum, per quod primùm quæretur objectum. Desiderabitur fateor alter observator, si conspicillum catoptricum sit magnum, quoniam ille, qui observat, in illa observat extremitate, quæ maxime elevata est. Sed ad incommodum hoc non attendendum est, si spectetur utilitas inventi: Si loco speculorum Sphæricorum possent obtineri parabolica exacte formata & polita, conspicilla hæc effectum præstarent quod de vitris ellipticis vel hyperbolicis speravimus; credo autem id in speculis facilius obtineri posse.

CON-

II.

CONSTRUCTIO PROBLEMATIS OPTICI.

Propoſitio 39 Libri v. Alhazeni, & 22 lib. VI. Vitellionis.

Puncta B, C, & circulus EK, cujus centrum eſt A, data ſunt in eodem plano; inveniendum eſt punctum K in peripheria circuli, ita ut lineæ BK, CK faciant cum linea AK angulos inter ſe æquales. TAB. LVI. fig. 1.

Ductis AB, AC; fiat AC, AF:: AF, AQ; & AB, AE:: AE, AP: ſint etiam AP, & AQ, bifariam diviſæ in R & S; in angulo BAC ſint perfecta parallelogramma PAQH & ARZS. In RZ producta ſumantur ZY & ZX, utraque æqualis lineæ quæ poteſt differentiam inter quadrata QS & ZS: fiat XV æqualis XY & parallela AB; & lateribus XV & XY deſcribatur hyperbola, quæ tranſibit per puncta Q & H, uti patet per conſtructionem; hyperbola hæc QXH occurret circulo in puncto K, quod quæritur.

Ductis KO & KI parallelis AC & AB, quarum KI occurrit YX in puncto D. Ob hyperbolam rectangulum YDX æquale eſt quadrato KD ordinatæ, vel quadrato OR; & rectangulum YTX æquale eſt quadrato HT, vel quadrato PR; & demto a rectangulo YTX, rectangulum YDX & a quadrato PR, quadratum OR, ſupererit rectangulum RDT vel AIQ, quod æquale erit rectangulo AOP. PO ergo eſt ad AI, vel OK ipſi æqualem, ut QI ad AO, vel IK; & ductis lineis KP, KQ triangula KOP, KIQ erunt ſimilia & ideo æquiangula; idcirco anguli APK, AQK, qui iidem ſunt, vel ſupplementa angulorum æqualium OPK, IQK erunt inter ſe æquales; ſed per conſtructionem AB, AE vel AK, :: AK vel AE, AP; ideo duo triangula BAK, KAP ſunt ſimilia, & ob eandem cauſam duo triangula CAK, KAQ, ſunt etiam ſimilia; ideo angulus BKA eſt æqualis angulo APK, & an-

angulus CKA æqualis ang. AQK, ſed demonſtravimus angulos APK & AQK eſſe æquales, ergo anguli BKA, CKA erunt inter ſe æquales Q. E. D.

Si punctum H cadat in circumferentiam circuli punctum H erit punctum K, quod quæritur & lineæ HP, KP, KO in unicam HP coaleſcunt; & ſimiliter lineæ HQ, KQ, KI in unam HQ, & quæ ſuperius demonſtrata ſunt & hic locum habent, in quo caſu Hyperbolâ non indigemus.

III.

ALITER.

Dato Speculo Cavo aut Convexo, itemque Oculo & Puncto Rei viſæ, invenire Punctum Reflexionis.

TAB. LVI. fig. 2.

Esto ſpeculum ex ſphæra quæ Centrum habeat A punctum; oculus vero ſit in B, & punctum viſibile in C, Planumque ductum per A, B, C, faciat in ſphæra Circulum D*d*, in quo invenienda ſint Reflexionis Puncta. Per tria Puncta A, B, C, deſcribatur Circuli Circumferentia, cujus ſit Centrum Z; occurrat autem ei producta AE, Perpend. BC, in R; & ſit duabus RA, OA, tertia Proportionalis NA; eritque NM, Parallela BC, altera Aſymptoton. Rurſus ſint Proportionales EA, $\frac{1}{2}$ AO, AI, & ſumma IY æquali IN, ducatur YM Parallela AZ; eaque erit altera Aſymptotos. Denique ſumptis IX, IS, quæ ſingulæ poſſint dimidium quadratum AO, una cum quadrato AI; erunt Puncta X & S in Hyperbola, aut ſectionibus oppoſitis D*d*, ad inventas Aſymptotos deſcribendis, quarum interſectiones cum Circumferentia DO, oſtendent Puncta Reflexionis quæſita. Conſtructio hæc, in omni Caſu, quo Problema ſolidum eſt, locum habet, præterquam in uno, ubi non Hyperbola ſed Parabola deſcribenda eſt; cum nimirum Circumferentia per Puncta A, B, C, deſcripta, tangit Rectam AE.

COM-

IV.

COMPENDIUM.

Ductâ lineâ AT, parallelâ CB, eaque bisecta in V, punctum hoc est illud, per quod transire debet una Hyperbolarum Oppositarum, quarum Asymptoti inventæ fuerunt YM, MN. TAB. LVI. fig. 3.

Sed en Tibi bonam illam Constructionem, quæ in omnibus Casibus obtinet. Sit Circulus datus ED, cujus Centrum est A; Puncta data, B & C. TAB. LVII fig. 4.

Ductis Lineis AB, AC, fiant Proportionales BA (Radius Circuli) & FA: Eodem modo CA, (Radius Circuli) & GA. Tum jungatur FG, eaque bisecetur in H; & per hoc punctum ducantur Lineæ LHK, MHN, se invicem intersecantes ad Angulos Rectos, quarumque LHK sit Parallela ei quæ bisecat Angulum BAC. Hæ sunt duæ Asymptoti Hyperbolarum describendarum per puncta F & G, & quarum una transibit etiam per Centrum A, quarum Intersectiones cum Circuli Peripheria notabunt puncta Reflexionis quæsita.

V.

ALIA SOLUTIO.

Problema Alhazeni.] *Dato Circulo, cujus Centrum A, Radius AD, & punctis duobus B, C; invenire punctum H in Circumferentia Circuli dati, unde ductæ HB, HC, faciant ad Circumferentiam Angulos æquales.* TAB. LVI. fig. 5.

Ponatur Inventum, ductaque AM recta, quæ bifariam secet Augulum BAC, ducatur ei perpendicularis HF, itemque BM, CL. Jungatur porrò AH, cui perpendicularis sit HE; rectisque BH, HC, occurrat AM in punctis K, G.

Sit

Sit jam $AM = a$	Quia ergo æquales Anguli KHE & CHZ,
$MB = b$	five EHG; estque EHA angulus rectus; erit ut KE ad EG, ita KA ad
$AL = c$	AG. Quia verò BM ad MK, ut HF ad FK, erit,
$LC = n$	ut BM + HF ad HF, ita MF ad FK,
Radius $AD = d$	i.e. $b+y : y :: a-x : \frac{ay-xy}{b+y}$. add. $FA = x$
$AF = x$	fit $KA = \frac{ay+bx}{b+y}$.
$FH = y$	

Rursus, quia CL ad LG, ut HF ad FG, erit permutando & dividendo CL − HF ad HF, ut LF ad FG, $n-y : y :: c-x : \frac{cy-xy}{n-y}$, quâ ablatâ ab $AF = x$, fit $GA = \frac{nx-cy}{n-y}$. Est autem $EA = \frac{dd}{x}$, quia Proportionales FA, AH, AE: Ergo EA − GA, hoc est, $EG, = \frac{dd}{x} - \frac{nx+cy}{n-y}$. Et KA − EA, hoc est, $KE = \frac{ay+bx}{b+y} - \frac{dd}{x}$.

Sed diximus, quod KE ad EG, ut KA ad AG; i.e. $\frac{ay+bx}{b+y} - \frac{dd}{x} : \frac{dd}{x} - \frac{nx+cy}{n-y} :: \frac{ay+bx}{b+y} : \frac{nx-cy}{n-y}$.

Unde invenitur

$$2anxxy + 2bnx^3 - ddbnx - ddnxy = +naddy + bddx$$
$$-2acxyy - 2bcxxy + ddbcy + ddcyy \quad - addyy - bddxy$$

Est autem $\frac{2bbc}{a}x^3 = \frac{2bbcddx}{a} - \frac{2bbcyyx}{a}$, quia $xx = dd - yy$.

Et quia $n = \frac{bc}{a}$, ergo $\frac{-2bbcxyy}{a} - \frac{ddbcyx}{a} - 2acxyy$
$+ddcyy = -addyy - bddxy$:

Et

Et divisis omnibus per y & ductis in a

$$-2bbcxy - ddbcx - 2aacxy + ddcay = -aaddy - bddax$$

$$abddx - cbddx + acddy + aaddy = 2aacxy + 2bbcxy$$

$$\frac{abddx - cbddx + acddy + aaddy}{2aac + 2bbc} = xy,$$ quæ æquatio

eſt ad Hyperbolam.

Vel quia $bc = na$, $\frac{abddx - anddx + acddy + aaddy}{2aac + 2bbc} = xy$.

Sit $\frac{add}{aa + bb} = p$; Ergo $\frac{pbx - pnx + pcy + pay}{2c} = xy$.

Unde porrò non difficulter invenitur ſequens Conſtructio: jungantur BA, AC, & applicato ſeorſim ad utramque Quadrato Radii AD, fiant inde AP, AQ; & juncto PQ, dividatur ipſa bifariam in R, & per punctum R ducantur RD, RN, ſeſe ad Rectos Angulos ſecantes, quorumque RD, ſit parallela AM, quae dividet bifariam Angulum BAC. Erunt jam RD, RN Aſymptoti oppoſitarum Hyperbolarum, quarum altera per Centrum A tranſire debet, quæque ſecabunt Circumferentiam in punctis H quæſitis. Tranſibunt autem Hyperbolæ per Puncta P, Q. TAB LVI. fig. 6.

Ratio Conſtructionis apparet, ductis $P\gamma$, & $Q\zeta$, perpendicularibus in AM. Fit enim $A\gamma = \frac{add}{aa+bb}$ ſive p; & $A\zeta = \frac{ap}{c}$. Item $P\gamma = \frac{pn}{c}$, & $Q\zeta = \frac{pb}{c}$. Quare $AO = \frac{pc+pa}{2c}$, & $OR = \frac{pb-pn}{2c}$. Unde Cætera facilia.

---

pag. præced. lin. pen. lege $-2acxyy$
lin ult. lege $-addyy-bddxy$:

VI.

Excerpta ex litteris Dni. Hugenii Acad. Reg. ſcient. Socii, ad auctorem Diarii Paris. de novo Microſcopio ex Hollandia allato.

MIcroſcopium hoc ex unico formatur exiguo globulo vitreo, ſimili illis, quibus in Hollandia & Anglia animalcula fuere obſervata in aqua puteali & pluvia, ut & illa in qua piper fuit maceratum, de quibus egiſti in 9. & 11. diario hujus anni (1678); ſed globuli de quibus nunc ago aliis hiſce minores ſunt.

Inter ipſos quos ex Hollandia attuli quidam magnitudine non ſuperant arenæ granulum; alii adeo exigui ſunt ut vix videri queant, quare objecta in immenſum amplificant; eo enim hæc majora apparent quo globuli ſunt minores.

Objectum obſervandum inter vitri laminam & lapidis ſpecularis lamellam includitur; hæc machinæ adaptantur quæ mihi aliis huc uſque uſitatis magis commoda videtur. Exigua guttula æquæ, in qua per duos aut tres dies piper fuit maceratum, ita incluſa, magna videtur natantibus piſciculis bene repleta piſcina.

Quæ peculiaria circa aquam hanc obſervavi, ne quæ in diario veſtro ſunt relata iterum memorem, hæc ſunt; ex omni pipere non eadem generantur animalcula; piper quoddam animalcula ceteris majora format, ſive hoc a piperis vetuſtate pendeat, ſive ab alia cauſa, quæ in ſequentibus detegi poterit.

Similia animalcula ex aliis ſeminibus ut ex ſemine coriandri etiam producuntur.

Hoc idem obſervavi in ſucco Betulæ, ubi per quinque aut ſex dies hunc ſervaveram.

Quidam animalcula viderunt in aqua in qua nux aromatica, aut caſia, maceratæ fuere: & probabile admodum eſt in multis aliis rebus ſimilia detegi poſſe.

Quis

Quis forte defendet animalcula haec corruptione, aut fermentatione, generari; sed alia dantur quorum origo ab hac diversa est, talia sunt quæ in animalium semine deteguntur, quæ cum hoc ipso nata videntur, & tanta copia observantur ut totum semen quasi ex hisce constet.

Translucida omnia sunt, celerrime moventur, & ranis, antequam horum pedes formentur, similia sunt.

Hæc animalcula in Hollandia primum fuere observata, & horum inventio admodum mihi utilis videtur, & quæ opus suppeditabit illis qui in animalium genesin inquirunt.

F I N I S.

CHRISTIANI HUGENII
EXPERIMENTA
PHYSICA.

CHRISTIANI HUGENII EXPERIMENTA PHYSICA.

Excerpta ex literis D^ni Hugenii, Academiæ regiæ scientiarum Socii, ad Auctorem Diarii Eruditorum, de Phænomenis aquæ aëre purgatæ.

ANtequam tibi communicarem quæ observavi de suspensione aquæ in vacuo, altera vice experimenta instituere volui, ut de observationibus olim a me factis certus essem, & ut melius penetrare possem in causas miri adeo effectus. Primum tibi ipsas referam observationes, & dein pergam ad conjecturas de ipsarum causa.

Experimenta quæ illustris Boyleus anno 1661 publicavit, cum descriptione machinæ Pneumaticæ mihi ab eo tempore dederunt occasionem examinandi hanc materiam; Unum ex experimentis illius est, si tubo vitreo, 4 pedes longo, aqua repleto, cujus extremitas aperta, everso tubo, immergitur aqua vitro contento, superimponas recipiens vel vas, unde aër educitur, post exhaustum aërem, quantum ope machinæ fieri potest, aqua tubi descendet in vitrum, donec ad altitudinem unius tantum pedis sustineatur, superiore tubi parte aquâ & aëre manente vacuâ. Censet optime, aquam ad illam altitudinem unius pedis supra superficiem aquæ in vitro hæ-

hærere propter aërem in recipiente superstitem, & qui ope machinæ, non satis exactæ, annihilari non potuit.

Similem construi machinam curaveram, & licet nondum mutaveram quæ in sequentibus correxi, ita tamen omnia adaptaveram, ut instituto experimento memorato aqua in tubo ad libellam aquæ in vitro descenderit; Quare in instituendo experimento non tubo longitudinis memoratæ indigebam. Adhibui tubum novem pollicum cum globo cavo in extremitate ut patet in hac figurâ.

TAB. LVI. fig. 7.

Concipiendum est vitrum CC in totum aquâ repleri, extremitatemque apertam immergi aquâ in vitro D; utrumque obtegitur vase B, cujus os apertum applicatur molli cuidam cimento, quo lamina AA induitur; hæc perforata est in medio parvo foramine, per quod exit aër, quando agitatur antlia; si adhibita aqua frigida experimentum instituatur in totum vas C evacuatur, donec aqua ad libellam aquæ in vitro D descendat.

EXPERIMENTUM I.

Aqua, sublatâ aëris pressione, hæret in tubo.

SEd ad finem mensis Decembris ejusdem anni 1661. cum reliquissem aquam illam in vacuo per 24 horas, (quo plane purgatur bullis aëris quas ejicit, quando adhibetur frigida) cumque implevissem vas C, admiratus vidi, licet optime eduxerim aërem ex vase B, aquam nullatenus descendere ex vase, quod plenum remanebat. Non poteram suspicari ullum in machinâ meâ vitium dari, nec vas B non bene fuisse obturatum; sed ut quidquid rei esset expiscarer, detraxi phialam C ex vase, & postquam in hac admisi parvam bullulam aëris, reposui phialam ut ante; & agitatâ machinâ, vidi tandem omnem aquam descendisse prope ad libellam illius quæ erat in vitro D. Id mihi persuasit, non dari vitium in machinâ & aquam aëre purgatam manere suspensam; licet vas B fuerit plane aëre vacuum vel ad minimum ita, uti erat quando aqua non-

nondum aëre purgata descendebat ex Phialâ; altera vice ut aqua descenderet, effeci immissâ in collum Phialæ bullâ adeo parvâ, ut ægre videri posset.

EXPERIMENTUM II.

Notabile quid in descensu aquæ aëre purgatæ.

SEd alio tempore mihi quid valde memorabile contigit. Cum non immisissem bullam aëream, post exhaustum aërem bullam formari observavi in inferiori parte colli Phialæ; Hæc bulla, continuo magis magisque aucta, ubi ad magnitudinem parvi pili pervenit, reliquit vitrum & incepit adscendere in collo Phialæ, ubi autem pervenit ad altitudinem unius pollicis supra superficiem aquæ in vitro D, non ulterius adscendit, sed subito sese expandit superiora versus & unico momento occupavit totam Phialam, ex qua eodem tempore aqua descendit per parvum id spatium, quod reliquum erat inter interiorem colli superficiem & bullam, quæ extensa erat, omnisque remansit infra illam altitudinem unius pollicis, ad quam bulla cæpit sese expandere. Omnia hæc porro mihi contigerunt instituenti experimenta cum tubis duorum pedum & majoribus, ubi aqua manebat suspensa eodem modo ut in tubo 9 pollicum.

Communicavi hæc experimenta cum societate regia Anglicana, sed noluere statim illis fidem dare, mihi autem indicarunt verisimiliter aquam Phialæ non descendisse, propter aërem non bene evacuatum: sed respondi, nullam dari rationem illud suspectandi si attendamus ad illud quod notavi in fine experimenti fuisse observatum; & præterea me ex experimentis frequenter repetitis de bona machinæ conditione certissimum esse. Tandem cum anno 1663 essem in Angliâ me præsente in consessu Societatis Regiæ idem experimentum eodemque cum successu institutum est, licet tubi fuerint quatuor & quinque pedum; dein in mentem venit Dno Boyle idem instituere experimentum, non adhibitâ anthâ, cum argento vivo in tubo vitreo, cujus extre-

mitas aperta immersa erat in alio argento vivo; quum primo detexisset methodum perfecte Mercurium aëre purgandi per tres vel quatuor dies. Tandem experimentum successit, & cum in experimento Torricelliano Mercurius descendat ad altitudinem 27 vel 28 pollicum supra superficiem Mercurii, in quo impositus est tubus, ita a Dno Boyle, & eodem etiam tempore a Dno Vicecomite Brounker, Præside Societatis Regiæ Anglicanæ, fuit institutum, ut primo hæreret ad altitudinem 34 pollicum, dein 52, postea 55 & tandem ad altitudinem 75 pollicum, tubo semper manente pleno, & huc usque nondum notum est, quænam sit omnium maxima altitudo possibilis. Dus Boyle etiam observavit, extracto tubo e Mercurio, in quo aperta ejus extremitas erat imposita, & retento tubo non clauso in aëre libero, Mercurium nihilominus non cecidisse. Porro in his experimentis, ut in illis quæ cum aquâ instituuntur, minimâ aëris bullâ in tubo, sive sponte sive concussione formatâ, subito Mercurium deprimit ad ordinariam altitudinem 27 vel 28 pollicum.

EXPERIMENTUM III.

Adhibito spiritu vini loco aquæ.

SEd ut ad experimenta nostra redeam, non solum illa iterum cum aqua institui, sed & cum Spiritu vini rectificato, & inveni, ad purgationem aëris tantum requiri, ut per unam horam in vacuo relinquatur, licet producat plus aëris quam aqua, uti ex hujus operationis circumstantiis quas referam quæque notabiles satis sunt, æstimari facillime potest. Postquam vas B proxime ope antliæ aëre evacuatum est, magnæ bullæ spiritus vini exeunt & tanta quidem copia, ut pars ejiciatur supra oram vitri D, quod pariter accidit in aquâ parumper calefactâ; sed non in illâ quæ frigida immittitur. Illæ ebullitiones continuo minuuntur, ita ut ex vini Spiritu, tantum majores aëris bullæ ad certa temporis intervalla singulatim exeant, & tandem nil omnino emergat. In-

Interim bullæ, quæ ascenderunt in tubum C, ita dilatantur ut plane impleant globum, ut & totam colli longitudinem, ita ut omnis vini spiritus fugatus sit, & ut pariter emittat multas magnas bullas per aperturam; quod clare indicat, esse aërem in lagena, vel aliam materiam elasticam ut aër, quandoquidem illa fugat spiritum vini longe infra superficiem illius qui est in vitro D contentus: etiam si iterum aërem intrare sinas in vas B, spiritus vini quidem adscendet in lagenam C, non autem plane illam replebit, sed superius hærebit satis notabilis aëris bulla.

EXPERIMENTUM IV.

Aër, ex Spiritu vini aut aqua exhaustus, hæc corpora iterum intrat.

SEd hic notandum, bullam illam si ita relinquatur per spatium unius vel duarum horarum, semper evanuisse, & in spiritum vini, unde emerserat, rediisse. Expertus etiam fui, si immittatur porro bulla veri aëris magnitudine unius pisi, etiam illam periisse, postquam per unam noctem relicta fuerit. Idem quoque accidit in aqua. Sed multo majus tempus requiritur, ut evanescat bulla.

Quod attinet causam præcipui nostri Phænomeni, suspensionis nempe aquæ & Mercurii, hæc est quam mihi persuadere potui huc usque omnium verisimillimam.

Præter pressionem aëris, quæ sustinet Mercurium ad altitudinem 27 pollicum in experimento Torricelliano, & quam dari ex infinitis aliis effectibus, quos videmus, constat, concipio & aliam pressionem illâ fortiorem materiæ aëre subtilioris, quæ haud difficulter penetrat vitrum, aquam, Mercurium, & omnia alia corpora quæ aëri impenetrabilia observamus. Hæc pressio addita ad aëris pressionem potest sustinere 75 pollices Mercurii & forte adhuc plures, quamdiu tantum agit in superficiem inferiorem, vel in superficiem Mercurii, in quem aperta tubi extremitas immer-

gitur: sed quam primum materia hæc potest agere etiam ad alteram partem (quod evenit si tubum concutiendo, vel immittendo parvam aëris bullam, occasio detur huic materiæ effectum suum inchoandi) pressio illius æqualis erit ab utraque parte, ita ut sola supersit aëris pressio quæ sustinet Mercurium ad ordinariam altitudinem 27 pollicum; Eadem de causa in experimento aquæ aëre purgatæ, post remotam pressionem aëris evacuando recipiens B, altera illa pressio ejusdem materiæ agit etiam ut antea in superficiem aquæ in vitro D, & cohibet ne aqua in Phiala C descendat. Sed ubi minima bulla aëris intrat phialam, materia quam dixi transire per vitrum & aquam, subito inflat bullam, editque pressionem æqualem illi, quæ agit in superficiem aquæ in vitro D, quare omnis aqua phialæ defluit, & ad libellam cum illa, quæ est in vitro sese constituit.

Quæret forte quispiam cur pressio ejus materiæ non agat in aquam suspensam in phiala C, & in Mercurium in tubo Dni. Boyle, etiam dum vasa hæc plena sunt, quoniam suppsui, illam haud difficulter penetrare vitrum æque ac aquam & Mercurium? Et quare particulæ ejus materiæ non se jungant, & incipiant pressionem, cum continuo in aqua & Mercurio eant & redeant, & vitrum non impediat illarum communicationem cum particulis exterioribus.

Ut huic difficultati fiat satis, quæ revera maxima est, dicam, licet partes ejus materiæ, quam suppsui, transitum inveniant inter illas, ex quibus vitrum aqua & Mercurius formantur, non tamen dari transitum satis latum ut plures simul transeant, neque ut se moveant vi, quæ requiritur ut dispergantur partes Mercurii vel aquæ, quæ inter se habent quendam nexum. Et ex hoc ipso nexu sequitur, (licet ad partem superficiei interioris vitri, quæ tangit aquam vel Mercurium suspensum, plures partes premantur actione particularum ejus materiæ, cum tamen plurimæ partes aquæ aut Mercurii non premantur, quæ a partibus vitri teguntur,) partes aquæ aut Mercurii sese mutuo sustinere, omnesque suspensas hærere; quia minor est pressio in superficiem aquæ vel argen-

genti vivi, quæ contingit vitrum, quam in inferiorem, quæ tota exposita est actioni materiæ, a qua secunda pendet pressio. Solutionem hanc fateor non mihi ita satisfacere, ut nullus mihi supersit scrupulus; nihilominus tamen persuasum habeo novam illam dari pressionem, præter aëris pressionem, cum ob experimenta supra relata tum ob duo alia nunc referenda.

EXPERIMENTUM V.

Laminæ metallicæ arcte inter se cohærent in vacuo licet nihil inter has detur.

Quando duæ laminæ metallicæ vel marmoreæ, quarum superficies sint perfecte planæ, ad se mutuo applicantur, ita cohærent, ut superiore elevatâ inferior eam insequatur, cujus effectus causa tribuitur merito pressioni aëris in superficies externas; duæ mihi sunt laminæ, quarum quævis circiter est magnitudinis pollicis quadrati, quæ ex materiâ conflatæ sunt, ex qua olim specula formabantur, & quæ ita junguntur, ut, licet nihil interponas, superior non solum alteram sustineat, sed interdum etiam pondus trium librarum cum inferiori conjunctum; in quo statu perseverant quamdiu desideraveris.

Has ita junctas & oneratas tribus libris suspendi in machinæ meæ recipiente, quod aëre evacuavi in tantum, ut superstes aër non pressione sua aquam ad altitudinem unius pollicis sustineret, & nihilominus laminæ meæ separatæ non sunt.

Idem etiam institui experimentum interposito spiritu vini inter laminas & inveni quod in recipiente vacuo aëre sustinerent sine separatione eadem pondera, quæ sustinebant recipiente aëre pleno.

Videtur id mihi manifeste satis indicare magnam superesse pressionem in recipiente, postquam aëre vacuus est, & hanc non magis quam ipsius aëris pressionem in dubium vocari posse; sed & alia ad illius confirmationem.

EXPERIMENTUM VI.

Effectus Siphonis in vacuo.

NOtum eſt, effectum ſiphonis crurum inæqualium, quo evacuatur aqua vaſis ſupra oram, non amplius tribui fugæ vacui, ſed ponderi aëris, qui premendo in ſuperficiem aquæ in vaſe, illam cogit ut in ſiphonem adſcendat, dum in alio crure illa gravitate ſuâ deſcendit. Inveni methodum qua effici, ut aqua e ſiphone fluxerit, poſtquam recipiens vacuum erat aëre; & obſervavi effectum, ſi aqua purgata fuerit aëre, eodem modo ac extra recipiens procedere.

Breviſſimum ſiphonis crus erat octo pollicum & apertura duarum linearum. Nec dubitari debet quin recipiens aëre bene vacuum fuerit; nam id poſſum affirmare, tum quoniam nullum antliâ aërem ulterius extrahere potui, tum ob alia ſigna certiora.

Magis ergo confirmatur noſtra hypotheſis materiam dari prementem aëre ſubtiliorem. Si quis laborem in ſe ſuſcipere vellet quærendi, quanta ſit vis hujus preſſionis quod melius fieri non poteſt niſi proſequendo experimenta cum tubis Mercurio plenis longioribus, quam quibus uſus eſt D^nus Boyle, inveniet forte, vim illam ſatis validam eſſe ad efficiendam unionem partium vitri & aliorum corporum, quæ nimis arcte cohærent, quam ut juncta tantum forent per contiguitatem & quietem uti voluit Carteſius.

F I N I S.



INDEX RERUM

Quatuor Tomis contentarum.

TOMUS PRIMUS

OPERA MECHANICA.

TOMUS SECUNDUS.

OPERA GEOMETRICA.

TO-

INDEX RERUM.

TOMUS TERTIUS.

OPERA ASTRONOMICA.

Rou-

Nec

TOMUS QUARTUS

OPERA MISCELLANEA.

FINIS.

CATALOGUS
QUORUNDAM LIBRORUM,
Qui apud JANSSONIOS VAN DER AA, Bibliopolas Lugduni Batavorum, venales prostant.

Abregé de l'Histoire generale des Turcs, par Vanel, 12°. 4 *voll. avec fig.*
Admiranda rerum admirabilium Encomia, 12°.
Æschinis Socratici Dialogi tres, per Horreum, 8°. Gr. & Lat.
Alaric ou Rome vaincuë, Poëme Heroïque, par Monsr. de Scudery 12°. *avec fig.*
AMINTAS HERDERSPEL VAN T. TASSO, DOOR WELLEKENS, 8°.
Andry de la Generation des Vers dans le Corps de l'Homme 12°.
Annales de la Cour & de Paris, pour les Annees 1697 & 1698. 12°.
Annus Sacer Poëticus, sive selecta de Divis Cœlestibus Epigrammata 12°. 2 Tomis.
Antonii Jus feudale, cum additamentis Strykii, 4°.
Apologie pour leurs Sereniss. Majestés Britanniques, contre un infame Libelle intitulé le vray Portrait de Guillaume Henry de Nassau, nouvel Absalom, nouvel Herode, nouveau Cromwel, nouveau Neron, 12°.
—— *pour les Protestans, ou l'Auteur justifié pleinement leur conduite & leur separation de la Communion de Rome*. 12°.
Athanasii Opera, Gr. Lat. fol. 2 Voll.
Aurea Bulla Caroli V. Imp. de jure & ordine succedendi in ducatum Mediolanensem, &c. 4°.
Bauhusii & Cabillavi Epigrammata, 24°.
Bellefontaine Medicine Dogmatique Mechanique, avec la Pharmacopée Rationelle, 12°. 2 voll.
BELLOSTE CHIRURGIEN D'HÔPITAL, 12°. avec fig.
Biblia Græca LXX. Interpretum, curâ L. Bos, 4°.
Bidermanni Acroamatum Academicorum Libri III. 12°.
Bisschop Chorus Musarum, sive Poëmata, 8°.
Blancardi Opera Medica, Theoretica, Practica & Chirurgica, 4°.
Blegny Art de guerir les Maladies Veneriennes, 12°. 3 Tomes *avec fig.*
Boleslavii Homo bene moriens 12°.
—— Gemmeum monile Animæ Christianæ, 12°.
Bontekoe Metaphysica, OEconomia Animalis & Geulinx Physica vera, 8°.
Borgesii Enodatio Juris Naturæ, 8°.
Bresmal Circulation des Eaux ou l'Hydrographie des Minerales d'Aix & de Spa, 8°.
Bruguier Reponse au Livre intitulé le Renversement de la Morale de Jesu Christ, par les Erreurs des Calvenistes. 12°.

Ggggg 3 Bur-

Burgundius ad Consuetudines Flandriæ aliarumque Gentium, 12°.
Camerarii Symbola ac Emblemata Ethico Politica, 8°.
Catalogus Librorum Manuscriptorum Angliæ & Hiberniæ, fol.
Cherubin Effets de la Force de la Contiguité des Corps, 12°.
Choix des bons Mots, 12°.
Claubergii Opera Omnia Philosophica, curâ Schalbruchii, 4°.
Clos de Aquis Mineralibus Galliæ & de Mixtis naturalibus, 12°.
Crebilon Oeuvres, 12°.
Defence de la Monarchie de Sicile contre les Entreprises de la Cour de Rome, 12°.
Description du Château de Versailles, 12°. avec fig.
Divorce Celeste par Pallavicin, 12°.
Donkers Idea Febris petechialis, 8°.
Dousæ Poëmata, 8°.
Eeuwigduurende Liefdes Almanak, 8°.
Epistolæ Præstantium ac Eruditorum Virorum, fol. Charta Maj.
Flâvissæ Poëticæ sive Electorum Poëticorum Thesaurus Sacro-Profanus, 8°.
Fleetwood Inscriptionum Antiquarum Sylloge, 8°.
Gassendi Abregé de la Philosophie, 12°. 7 Voll.
Gobart Tractatus Philosophicus de Barometro, 12°. cum fig
Guide, ou nouvelle Description d'Amsterdam, 8°.
Hartmanni Praxis Chymiatrica, 8°.
Hartsoeker Principes de Physique, 4°.
Havercamp de nummis Alexandri Magni, 4°. cum fig.
Herbinius de Cataractis in Genere, 4°. cum fig.
Heucheri novi Proventus Horti Medici Acad. Vitembergensis, 4°.
Hildani Observationes & Epistolæ Chirurgico-Medicæ, 4°. 2 Voll.
Hippocratis Aphorismi per Almeloveen, 24°.
—— Metrica paraphrasi translati ab H. v. Poot. 24°.
Histoire des Indes Orientales par Mr. Souchu de Rennefort, 12°.
—— *des Iles Antilles de l'Amerique* 4°. avec fig.
Homere Iliade & Odyssée, par Mad. Dacier, 12°. 6 Tomes, avec fig.
—— *Iliade Poëme avec un discours sur Homere, par Mr. de la Motte.* 12°.
Huetius de Interpretatione, 8°.
Huygens Traité de la Lumiere. 4°.
Jablonski Disquisitio de Lingua Lycaonica, 4°.
Jean danse mieux que Pierre, Pierre danse mieux que Jean. 12°. 5 Voll.
Instruction pour reunir les Eglises pretendues Reformees a l'Eglise Romaine, par Mr. Comiere. 12°.
Jurieu Justification de la Morale des Reformez, contre les Accusations de Mr. Arnaud, 8° 2 Tomes.
Jus Austriacum in successione Regnorum Hispaniæ vindicatum, 4°.

Knib-

CATALOGUS LIBRORUM.

Knibbe Manuductio ad Oratoriam Sacram, 8°. 2 Voll.
Lamy Elemens de Mathematique, ou traité de la Grandeur en General, 12°.
Leti Critique Historique, Politique, Morale, Economique & Comique, sur les Loteries Anciennes & Modernes, &c. 12°.
Letres Provinciales par Louis Montalte 8°. 3 Voll.
— *de Fr. Rabelais, avec des Observations*, 8°.
— *du Cardinal Bentiveglio, Ital. franc.* 12°.
Lipenii Bibliotheca Juridica, Struvii, fol.
Logique par Mrs. de Port Rojal, 12°.
— *courte & facile par le Sr. Du Boisverd* 8°.
LYK-PREDIKATIE OVER DE DOOD VAN D' Hr. MITSEN, DOOR J. DE HARTOGH, 4°
Machiavelli Historia Florentina, 12°.
Malvezzi Opere Historische e Politische, 12°.
— *Il Tarquino Superbo*, 12°.
Manzini Opere, 12°.
— *furori della Gioventu Esercitii Rhetorici*, 12°.
Marechal Francois, 12°.
Mascampi Epitome Historiæ Civilis, 8°.
Medulla Justinianea, 12°.
Melanges Historiques, 12°.
Menken de la Charlatanerie des Savans, 8°.
Moïens de reunir les Protestans avec l'Eglise Romaine 12°.
Mollenbroccius de Arthritide, 8°.
Monavii Bronchotomia, quæ est gutturis aperiendi artificiosa ratio, 8°.
Mort Idea Actionis Corporum 12°.
MUNDI OPERA OMNIA MEDICO-PHYSICA, 8°.
Oeuvres de Mr. Le Noble 12°. 19 Voll.
Oudini Commentarius de Scriptoribus Ecclesiæ Antiquis, fol. 3 Voll.
Pacii Analysis & Isagoge 8° 2 Voll.
Parladorii Opera Juridica, 4°. 2 voll.
Passe partout Galant, 12°.
PASTOR FIDO, 32°. Appresso P. Mortier.
Petau Histoire Universelle, 12°. Paris 5 Tomes.
Pilpay Conseils & Maximes, 8°.
Plazzonus de Partibus Generationis inservientibus, 12°.
PLUIMERS GEDICHTEN 4°. TWEEDE DEEL.
Pourtraits des plus Celebres Professeurs de Leide, 4°.
Preparations pour la Ste. Cene, avec le Voyage de Bethel, 12°.
Rochefoucault Reflexions ou Sentences & Maximes morales, 12°.
Schiere Doctrina Testamentorum & Fœderum omnium Divinorum, 4°.

Se-

CATALOGUS LIBRORUM.

Senecæ & Syri Mimi Sententiæ, cum Notis Diversorum & Gruteri, 8°.
SERRE DOLCI PENSIERI SOPRA LA MORTE, 8°.
THEATRE ET AUTRES POESIES DE MADEM: BARBIER, 12°. avec fig.
VARIOLARUM METHODUS PER TRANSPLANTATIONEM, 8°.
Veslingii Syntagma Anatomicum, sive Anatomia, 4°. cum fig.
VIEUSSENS NOVUM VASORUM CORPORIS HUMANI SYSTEMA, 8°.
VIGNOLE REGLE DES CINQ ORDRES D'ARCHITECTURE, 4°. avec fig.
Voyage de Groenland, par le Pere Cordelier Pierre de Mesange, 12°. 2 Voll.
— *aux Côtes de Guinée & en Amerique*, 12°.
— *Le Prudent Voyageur, par L. du May*, 12°. 3 Voll.
WECHWYSER DER EENVULDIGEN, DOOR J. DE HARTOGH, 8°.
Westenberg ad Pandectas, 8°.
Dictionaire Englisch and Frensch & Frensch and Englich of Miege 8°.
— Italiaansch en Nederduyts, door Moses Giron, 4°.
— Antiquitatum Romanarum & Græcar. per Danetum, in Usum Delphini, 4°.
Grammaire Francoise d'un tour nouveau, composée en faveur de ceux qui preferent la Pratique a la Theorie, par Mr. Derbaud, 12°. avec fig.

Multi etiam alii apud Eosdem reperiuntur.

AVIS AU RELIEUR.

LE Relieur prendra garde que le papier qui est à côté des Figures doit être conservé pour faire deborder les Figures hors du Livre, & les placer suivant la page marquée sur chaque planche.

BERIGT AAN DEN BOEK-BINDER.

DEn Boek-binder zy gewaarschout het papier ter zyde de Figuren niet af te snyden; maar zodanig in te setten, dat de Figuren buyten het Boek uitslaan: dezelven moeten geplaast werden volgens de paginaas op yder Tabel genoteert.